



เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู
(Mathematics Principle for Teacher)

ธัญชยศ จำปาหวาย

คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู
(Mathematics Principle for Teacher)

ธนัชยศ จำปาหวาย
วท.ด. (คณิตศาสตร์)
วท.ม. (คณิตศาสตร์)
วท.บ. (คณิตศาสตร์)

คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครูเล่มนี้ เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ (5 ปี) (หลักสูตรใหม่ พ.ศ. 2555) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเป็นแหล่งเรียนรู้เกี่ยวกับหลักการคณิตศาสตร์อันประกอบไปด้วย ระบบสัจพจน์ ตรรกศาสตร์เบื้องต้น วิธีการพิสูจน์ เซตเบื้องต้น ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เซตจำกัดและเซตอนันต์ ระบบจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น และแนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้และกิจกรรมต่าง ๆ ในระดับมัธยมศึกษา โดยผู้เขียนได้ใช้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E เป็นรูปแบบการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 9 บท ประกอบไปด้วย บทนำ ตรรกศาสตร์ ระเบียบวิธีการพิสูจน์ เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซตจำกัดและเซตอนันต์ ระบบจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น โดยคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในเล่มนี้ ผู้เขียนจะใช้ตามพจนานุกรมศัพท์ทางคณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ.2559

เนื้อหาในเล่มนี้เรียบเรียงมาจากประสบการณ์การสอนในวิชาหลักการคณิตศาสตร์ ทฤษฎีจำนวน และทฤษฎีเซต ที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา ผู้เขียนมุ่งหวังว่าเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ จะเป็นเอกสารอ่านประกอบเพื่อนำไปเรียนในวิชาดังกล่าวได้ดียิ่งขึ้น

เนื้อหาที่กล่าวไว้ในวิชา "หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู" เป็นคณิตศาสตร์ระดับเบื้องต้นเพื่อพัฒนาพื้นฐานความเข้าใจไปยังระดับสูง และนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนคณิตศาสตร์ในแขนงต่าง ๆ อีกทั้งยังเห็นการสร้างสิ่งต่าง ๆ ขึ้นอย่างเป็นระบบระเบียบ ภายใต้สัจพจน์และกฎทางตรรกศาสตร์ที่ยอมรับ ทำให้ผู้เรียนเห็นภาพของคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้งมากขึ้น โดยเฉพาะครูคณิตศาสตร์ที่จะถ่ายทอดสิ่งเหล่านี้ไปยังลูกศิษย์ต่อไป

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้จะเกิดขึ้นไม่ได้ถ้าไม่มีครูอาจารย์ที่คอยอบรมสั่งสอนและเป็นแบบอย่างที่ดีแก่ผู้เขียน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ศาสตราจารย์ ดร.พัฒน์ อุดมกะวานิช ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ผู้เป็นต้นแบบของการสอนหลักการคณิตศาสตร์ของผู้เขียน รวมถึงบิดามารดาและพี่น้อง อาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ช่วยอ่านและให้คำแนะนำเพื่อให้ตำราเล่มนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น และลูกศิษย์รุ่นปัจจุบันที่ช่วยหาคำผิดอย่างตั้งใจ สุดท้ายหวังว่าเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่นักศึกษาและผู้สนใจ

ธัญยศ จำปาหวาย

2559

แผนบริหารการจัดการเรียนรู้

ภาคเรียนที่ 1/2559

ระดับครุศาสตรบัณฑิต

MED1401 หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู

(Mathematics Principle for Teacher)

หน่วยกิต 3(3-0-6)

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

หมวดที่ 1 หลักการและเป้าประสงค์ของรายวิชา

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เปลี่ยนแปลงตามยุคและสมัยมาโดยตลอด และต้องการพัฒนารูปแบบการสอนและสื่อนวัตกรรมใหม่อยู่เสมอ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้อย่างเต็มศักยภาพของตนเอง การเรียนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันผู้เรียนต้องสามารถแสวงหาความรู้ได้ด้วยตนเอง ผ่านการลงมือปฏิบัติ โดยมีผู้สอนคอยให้คำแนะนำ อย่างไรก็ตามสิ่งที่ไม่ค่อยจะเปลี่ยนแปลงเท่าไรนักคือ ธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นความเข้าใจพื้นฐานในศาสตร์วิชานี้ รวมไปถึงการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญในการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ เพื่อให้ทุกคนยอมรับความจริงที่เกิดขึ้นอย่างเป็นสากล อีกประการหนึ่งคือความเข้าใจเกี่ยวกับเซตซึ่งเป็นมูลฐานของทุกสาขาในวิชาคณิตศาสตร์ และความเข้าใจนี้จะทำให้เข้าใจเรื่อง ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน ได้ดียิ่งขึ้น สำหรับความหมายของเซตจำกัดและอนันต์อาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันมาช่วยอธิบายทำให้พิสูจน์บางอย่างได้อย่างเหลือเชื่อเมื่อใช้ความรู้สีกัดดลีน ส่วนสัจพจน์ของจำนวนจริงนำไปพิสูจน์สมบัติพื้นฐานทำให้เกิดความเข้าใจและสามารถนำสิ่งเหล่านี้ไปถ่ายทอดได้ในอนาคต สำหรับการศึกษาจำนวนเชิงซ้อนอาศัยการขยายแนวคิดจากระบบจำนวนจริง และสมบัติบางประการสามารถนำไปแก้ปัญหาในจำนวนจริงได้ เป้าประสงค์สุดท้ายคือผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงเนื้อหา กับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษา และออกแบบการจัดการเรียนการสอนในแต่ละเนื้อหาได้อย่างเหมาะสม

หมวดที่ 2 ผลลัพธ์การเรียนรู้

หลังจากที่ศึกษาและเรียนรู้ในรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครูนักศึกษาจะต้องมีความรู้ ความสามารถและคุณลักษณะที่ต้องการดังต่อไปนี้

1. เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์ โครงสร้างและระบบทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ และแปลงประโยคภาษาเป็นตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้
3. เพื่อให้ นักศึกษาสามารถเขียนบทพิสูจน์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้

(3)

4. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจการดำเนินการบนเซต และเขียนพิสูจน์เกี่ยวกับเซตได้
5. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจความสัมพันธ์ และตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับความสัมพันธ์ได้
6. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจฟังก์ชัน และพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับฟังก์ชันได้
7. เพื่อให้นักศึกษานำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันไปอธิบายเซตจำกัดและเซตอนันต์ได้
8. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง
9. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น และพิสูจน์สมบัติบางประการได้
10. เพื่อให้นักศึกษาสามารถเชื่อมโยงเนื้อหาเกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาได้

หมวดที่ 3 ลักษณะและการดำเนินการ

คำอธิบายรายวิชา

ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ ระเบียบวิธีพิสูจน์ เซตเบื้องต้น ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น การเชื่อมโยงเนื้อหาเกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษา

จำนวนชั่วโมงของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จำนวนชั่วโมงของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ไม่น้อยกว่า 51 ชั่วโมงต่อภาคเรียน เวลาที่ใช้สอนแบ่งเป็น

การสอนภาคบรรยายทฤษฎี	51 ชั่วโมง
การสอนภาคปฏิบัติ	- ชั่วโมง
การศึกษาด้วยตัวเอง	102 ชั่วโมง

มอบหมายงานให้นักศึกษาทำการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหลักการคณิตศาสตร์ และสื่อมัลติมีเดียที่เกี่ยวข้อง และให้ศึกษาเพิ่มเติมจากเว็บไซต์เชิงวิชาการที่เกี่ยวข้อง

จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่อาจารย์ให้คำปรึกษา

การให้คำปรึกษาเป็นรายบุคคล คนละไม่น้อยกว่า 1 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

หมวดที่ 4 ผลลัพธ์การเรียนรู้ประจำหน่วย

หลังจากที่ศึกษาและเรียนรู้ในรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครูนักศึกษาจะต้องมีความรู้ ความสามารถและคุณลักษณะที่ต้องการดังต่อไปนี้

1. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์ โครงสร้างและระบบทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ และแปลงประโยคภาษาเป็นตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้
3. เพื่อให้นักศึกษาสามารถเขียนบทพิสูจน์ทั้ง 6 วิธี
4. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจการดำเนินการบนเซต และเขียนพิสูจน์เกี่ยวกับเซตได้
5. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจความสัมพันธ์ และตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับความสัมพันธ์ได้
6. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจฟังก์ชัน และพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับฟังก์ชันได้
7. เพื่อให้นักศึกษานำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันไปอธิบายเซตจำกัดและเซตอนันต์ได้
8. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง
9. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น และพิสูจน์สมบัติบางประการได้
10. เพื่อให้นักศึกษาสามารถเชื่อมโยงเนื้อหาเกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาได้

หมวดที่ 5 แผนการจัดการเรียนรู้และวิธีการประเมินผลการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้ในรายวิชานี้ ได้ออกแบบตามผลลัพธ์การเรียนรู้หลักของรายวิชาที่กำหนดไว้ข้างต้น โดยครอบคลุม 10 ข้อประกอบไปด้วย

1. ผลลัพธ์การเรียนรู้ของรายวิชานี้มี 10 ข้อ (ดังตารางที่ 1)
2. หัวข้อเนื้อหา/สาระ (Contents to be learned)
ในรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครูได้กำหนดหัวข้อ/สาระ ไว้ดังนี้ บทนำ (ธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์) ตรรกศาสตร์ ระเบียบวิธีการพิสูจน์ เซตเบื้องต้น ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซตจำกัด และเซตอนันต์ ระบบจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น
3. เทคนิควิธีสอน
การสอนในรายวิชานี้ ประกอบไปด้วย
 - 3.1 วิธีสอนแบบบรรยาย (Lecture Method) โดยการทบทวนความรู้เดิมผู้เรียน โดยตั้งคำถามและทำแบบทดสอบความรู้เดิม เพื่อนำไปสู่การบรรยาย

(5)

- 3.2 วิธีสอนแบบอภิปราย (Discussion Method) แบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่ม ๆ โดยการกำหนดหัวข้อ แล้วให้แต่ละกลุ่มนำเสนอและอภิปราย จากนั้นผู้สอนอภิปรายเพื่อนำไปสู่การสรุปเนื้อหาและความรู้ที่ตรงตามวัตถุประสงค์
- 3.3 วิธีสอนแบบสืบเสาะ (Inquiry Method) โดยให้ผู้เรียนรู้จักสืบเสาะหาความรู้จาก เอกสาร ตำรา หนังสือ หรือค้นหาจากอินเทอร์เน็ต
- 3.4 วิธีสอนแบบเปิด (Open Approach) โดยใช้ตั้งคำถามเชิงลึกเพื่อให้ผู้เรียนพบความรู้ด้วยตนเอง จากการลงมือปฏิบัติจริง

ตารางที่ 1. การกระจายผลลัพธ์การเรียนรู้ เนื้อหา/สาระ วิธีการสอน/กิจกรรมการเรียนรู้ หลักฐาน/ผลงาน สื่อและการประเมินผลการเรียนรู้

สพด./ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการสอน/กิจกรรม	หลักฐานการเรียนรู้ ผลงาน	สื่อการเรียนรู้	การวัด/การประเมินผล
1/3	1.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์ โครงสร้างและระบบทางคณิตศาสตร์	-ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ -โครงสร้างของคณิตศาสตร์ -ปฏิทรรศน์ -ความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์ -การจัดการเรียนรู้แบบ 5E	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึกกิจกรรม	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจากใบบันทึกกิจกรรม
2/3	2.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์และแปลงประโยคภาษาเป็นตรรกศาสตร์ สัญลักษณ์ได้	-ประพจน์ -สมมูลของประพจน์ -สัจนิรันดร์	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
3/3	2.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์และแปลงประโยคภาษาเป็นตรรกศาสตร์ สัญลักษณ์ได้ 10. เพื่อให้ นักศึกษาสามารถเชื่อมโยงเนื้อหา กับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาได้	-การอ้างเหตุผล -ตัวบ่งปริมาณ -การจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์	-วิธีการสอนแบบบรรยาย -วิธีการสอนแบบอภิปราย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจากใบบันทึก assignment -ประเมินจากรายงานกลุ่ม

สปด./ ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการ สอน/กิจกรรม	หลักฐานการ เรียนรู้ ผลงาน	สื่อการเรียนรู้	การวัด/การ ประเมินผล
4/3	3.เพื่อให้ นักศึกษา สามารถเขียนบท พิสูจน์ในรูปแบบต่าง ๆ	-การพิสูจน์ข้อความ แบบมีเงื่อนไข -การพิสูจน์ข้อความ แบบแจกแจงกรณี -การพิสูจน์ข้อความ แบบผกกลับได้	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
5/3	3.เพื่อให้ นักศึกษา สามารถเขียนบท พิสูจน์ในรูปแบบต่าง ๆ	-การพิสูจน์โดยวิธี ขัดแย้ง -การพิสูจน์ข้อความ ซึ่งเป็นไปได้เพียงเดียว -การพิสูจน์โดยหลัก อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
6/3	4.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจการดำเนินการ บนเซตและเขียน พิสูจน์เกี่ยวกับเซตได้	-การดำเนินการบนเซต -ยูเนียนและอินเตอร์- เซกชันเพิ่มเติม	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
7/3	4.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจการดำเนินการ บนเซตและเขียน พิสูจน์เกี่ยวกับเซตได้ 10. เพื่อให้ นักศึกษา สามารถเชื่อมโยง เนื้อหาหลักสูตร คณิตศาสตร์ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาได้	-ผลคูณคาร์ทีเซียน -การจัดการเรียนรู้ เรื่องเซต	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
8/3	5.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจความสัมพันธ์ และตรวจสอบสมบัติ ต่าง ๆ เกี่ยวกับ ความสัมพันธ์ได้	-ความสัมพันธ์ โดเมนและเรนจ์ -ความสัมพันธ์สมมูล	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
9/3	5.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจความสัมพันธ์ และตรวจสอบสมบัติ ต่าง ๆ เกี่ยวกับ ความสัมพันธ์ได้	-ความสัมพันธ์สมมูล (ต่อจาก 8/3) -การเรียงอันดับ บางส่วน	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment

(7)

สพด./ ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการ สอน/กิจกรรม	หลักฐานการ เรียนรู้ ผลงาน	สื่อการเรียนรู้	การวัด/การ ประเมินผล
10/3	6.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจฟังก์ชันและ พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับฟังก์ชันได้	-นิยามและชนิดของ ฟังก์ชัน -ฟังก์ชันค่าจริง -พีชคณิตของฟังก์ชัน -ฟังก์ชันผกผัน	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
11/3	6.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจฟังก์ชันและ พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับฟังก์ชันได้	-ฟังก์ชันประกอบ -ภาพและภาพผกผัน	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
12/3	6.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจฟังก์ชันและ พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับฟังก์ชันได้ 10. เพื่อให้ นักศึกษา สามารถเชื่อมโยง เนื้อหาหลักสูตร คณิตศาสตร์ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาได้	-การดำเนินการ ทวิภาค -การจัดการเรียนรู้ เรื่องฟังก์ชัน	-วิธีการสอน แบบบรรยาย -วิธีการสอน แบบเปิด	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
13/3	7.เพื่อให้ นักศึกษา นำความรู้เกี่ยวกับ ฟังก์ชันไปอธิบาย เซตจำกัดและ เซตอนันต์ได้	-การเทียบเท่า ของเซต -เซตจำกัด	-วิธีการสอน แบบบรรยาย -วิธีสอน แบบสืบเสาะ	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
14/3	7.เพื่อให้ นักศึกษา นำความรู้เกี่ยวกับ ฟังก์ชันไปอธิบาย เซตจำกัดและ เซตอนันต์ได้	-เซตอนันต์ -เซตนับได้ -เซตนับไม่ได้	-วิธีการสอน แบบบรรยาย -วิธีสอน แบบอภิปราย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment -ประเมินจาก รายงานกลุ่ม
15/3	8.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติ พื้นฐานเกี่ยวกับ จำนวนจริง 10. เพื่อให้ นักศึกษา สามารถเชื่อมโยง เนื้อหาหลักสูตร คณิตศาสตร์ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาได้	-สัจพจน์นาม -กฎไตรวิภาค -ค่าสัมบูรณ์ -สัจพจน์ความ ความบริบูรณ์ -การจัดการเรียนรู้ เรื่องจำนวนจริง	-วิธีการสอน แบบบรรยาย -วิธีสอน แบบสืบเสาะ	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment

สพด./ ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการ สอน/กิจกรรม	หลักฐานการ เรียนรู้ ผลงาน	สื่อการเรียนรู้	การวัด/การ ประเมินผล
16/3	9.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจจำนวนเชิงซ้อน เบื้องต้นและพิสูจน์ สมบัติบางประการได้	-การดำเนินการ บนจำนวนเชิงซ้อน -มอดุลัส -สังยุค -กราฟของจำนวน เชิงซ้อน	-วิธีการสอน แบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment
17/3	9.เพื่อให้ นักศึกษารู้ เข้าใจจำนวนเชิงซ้อน เบื้องต้นและพิสูจน์ สมบัติบางประการได้ 10. เพื่อให้ นักศึกษา สามารถเชื่อมโยง เนื้อหา กับหลักสูตร คณิตศาสตร์ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาได้	-จำนวนเชิงซ้อน ในรูปเชิงขั้ว -การจัดการเรียนรู้ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	-วิธีการสอน แบบบรรยาย -วิธีสอน แบบอภิปราย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจาก ใบบันทึก assignment -ประเมินจาก รายงานกลุ่ม

ตารางที่ 2. ปฏิทินและแผนการนำเสนอเนื้อหาสาระและกิจกรรมการเรียนรู้

วันที่	สพด. ที่	เนื้อหา/วิธีการสอน/กิจกรรม	นักศึกษา/อาจารย์
ส.ค.	1	-ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ -โครงสร้างของคณิตศาสตร์ -ปฏิทรรศน์ -ความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์ -การจัดการเรียนรู้แบบ 5E	อ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย
	2	-ประพจน์ -ตัวเชื่อมประพจน์ นิเสธประพจน์ และตารางค่าความจริง -สมมูลของประพจน์ -การตรวจสอบสมมูลโดยตารางค่าความจริง -การตรวจสอบสมมูลโดยใช้กฎพื้นฐาน -สัจนิรันดร์ -การตรวจสอบสัจนิรันดร์โดยตารางค่าความจริง -การตรวจสอบสัจนิรันดร์โดยวิธีขัดแย้ง	อ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย
ก.ย.	3	-การอ้างเหตุผล -ตัวบ่งปริมาณ -การแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ -การจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์ -รายงานกลุ่มเรื่องการจัดการเรียนรู้	นักศึกษา/ อ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย

(9)

วันที่	สปด. ที่	เนื้อหา/วิธีการสอน/กิจกรรม	นักศึกษา/อาจารย์
	4	-การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข -การพิสูจน์ข้อความแบบแจกแจงกรณี -การพิสูจน์ข้อความแบบผกกลับได้	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	5	-การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง -การพิสูจน์ข้อความที่เป็นไปได้เพียงอย่างเดียว -การพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	6	-การดำเนินการบนเซต -อินเตอร์เซกชัน ยูเนียน ผลต่าง และส่วนเติมเต็ม -ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันเพิ่มเติม	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
ต.ค.	7	-ผลคูณคาร์ทีเซียน -การจัดการเรียนรู้เรื่องเซต	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	8	-ความสัมพันธ์ -โดเมน เรจัน -ความสัมพันธ์สมมูล	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	9	-ความสัมพันธ์สมมูล (ต่อจาก สปด. ที่ 8) -ผลแบ่งกัน -การเรียงอันดับบางส่วน	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	10	-นิยามและและชนิดของฟังก์ชัน -ฟังก์ชันค่าจริงและพีชคณิตของฟังก์ชัน -ฟังก์ชันผกผัน	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
พ.ย.	11	-ฟังก์ชันประกอบ -ภาพและภาพผกผัน	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	12	-การดำเนินการทวิภาค -สมบัติปิด สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม -เอกลักษณ์ และตัวผกผัน -การจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	13	-การเทียบเท่าของเซต -เซตจำกัด	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	14	-เซตอนันต์ -เซตนับได้และเซตนับไม่ได้ -อภิปรายรายการกลุ่มเรื่องเซตชนิดของเซต	นักศึกษา/ อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
ธ.ค.	15	-สัจพจน์สนาม กฎไตรภาค -ค่าสัมบูรณ์ และสัจพจน์ความบริบูรณ์ -การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนจริง	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	16	-การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน -มอดุลัสและสังยุค -กราฟจำนวนเชิงซ้อน	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
	17	-จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว -การหารากโดยทฤษฎีบทเดออร์มัวฟร์ -การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	อ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย

การประเมินผลการเรียนรู้

การประเมินผลการเรียนรู้ภาคทฤษฎี และการมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ (40 %)

ความตั้งใจ ความสนใจเรียน	10%
คะแนนระหว่างเรียน (Assignment)	10%
โครงการรายกลุ่ม (Project)	10%
สอบย่อย (Quiz)	10%

หมวดที่ 6 แหล่งทรัพยากร และสื่อการสอน

หนังสือและสื่อการเรียนรู้หลักสำหรับวิชานี้

ธนัชศ จำปาหวาย (2559). **เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู**.
กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

เว็บไซต์ http://www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

หนังสือ เอกสารประกอบ และสื่อที่ควรศึกษาเพิ่มเติม

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2539). **อุปนิสัยเชิงคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: กรมวิชาการ

ฉัฐไชย ลีนาวงศ์. (2547). **ตรรกะแห่งการพิสูจน์**. กรุงเทพฯ: บริษัทสำนักพิมพ์ท็อปจำกัด

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย

Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014)
Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended).
Marleston, Australia : Haese& Harris Publications

Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd

แผนบริหารการสอนประจำวิชา

หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู

ชื่อวิชา หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู

รหัสวิชา MED1401

Mathematics Principle for Teacher

จำนวนหน่วยกิต-ชั่วโมง

3(3-0-6)

เวลาเรียน 17 สัปดาห์

51 ชั่วโมง/ภาคเรียน

คำอธิบายรายวิชา

ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ ระเบียบวิธีพิสูจน์ เซตเบื้องต้น ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น การเชื่อมโยงเนื้อหาเกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษา

วัตถุประสงค์ทั่วไป

1. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์ โครงสร้างและระบบทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ และแปลงประโยคภาษาเป็นตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้
3. เพื่อให้นักศึกษาสามารถเขียนบทพิสูจน์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้
4. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจการดำเนินการบนเซต และเขียนพิสูจน์เกี่ยวกับเซตได้
5. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจความสัมพันธ์ และตรวจสอบสมบัติต่างๆเกี่ยวกับความสัมพันธ์ได้
6. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจฟังก์ชัน และพิสูจน์สมบัติต่างๆเกี่ยวกับฟังก์ชันได้
7. เพื่อให้นักศึกษานำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันไปอธิบายเซตจำกัดและเซตอนันต์ได้
8. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง
9. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น และพิสูจน์สมบัติบางประการได้
10. เพื่อให้นักศึกษาสามารถเชื่อมโยงเนื้อหาเกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาได้

(12)

เนื้อหาและเวลาที่ใช้สอน

บทที่ 1 บทนำ

3 ชั่วโมง

ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

โครงสร้างของคณิตศาสตร์

ปฏิบัติธรรม

ความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนรู้แบบ 5E

สรุป

บทที่ 2 ตรรกศาสตร์

6 ชั่วโมง

ประพจน์

สมมูลของประพจน์

สัจนิรันดร์

การอ้างเหตุผลและการพิสูจน์

ตัวบ่งปริมาณ

การจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์

สรุป

บทที่ 3 ระเบียบวิธีการพิสูจน์

6 ชั่วโมง

การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข

การพิสูจน์ข้อความแบบแจกแจงกรณี

การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้

การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง

การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้เพียงอย่างเดียว

การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สรุป

บทที่ 4	เขต	6 ชั่วโมง
	การดำเนินการบนเขต	
	ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันเพิ่มเติม	
	ผลคูณคาร์ทีเซียน	
	การจัดการเรียนรู้เรื่องเขต	
	สรุป	
บทที่ 5	ความสัมพันธ์	6 ชั่วโมง
	บทนิยามและตัวอย่างของความสัมพันธ์	
	ความสัมพันธ์สมมูล	
	การเรียงอันดับบางส่วน	
	สรุป	
บทที่ 6	ฟังก์ชัน	9 ชั่วโมง
	นิยามและชนิดของฟังก์ชัน	
	ฟังก์ชันค่าจริงและพีชคณิตของฟังก์ชัน	
	ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ	
	ภาพและภาพผกผัน	
	การดำเนินทวิภาค	
	การจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน	
	สรุป	
บทที่ 7	เซตจำกัดและเซตอนันต์	6 ชั่วโมง
	การเทียบเท่าของเซต	
	เซตจำกัด	
	เซตอนันต์	
	เซตนับได้	
	เซตนับไม่ได้	
	สรุป	

บทที่ 8	ระบบจำนวนจริง	3 ชั่วโมง
	สัจพจน์สนาม	
	กฎไตรวิภาค	
	ค่าสัมบูรณ์	
	สัจพจน์ความบริบูรณ์	
	การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนจริง	
	สรุป	
บทที่ 9	จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น	6 ชั่วโมง
	การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน	
	มอดุลัสและสังยุค	
	กราฟของจำนวนเชิงซ้อน	
	จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	
	การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	
	สรุป	

(15)

การวัดและการประเมินผล

1. การวัดผล

แบ่งคะแนนตลอดภาคเรียนออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

1.1 คะแนนระหว่างภาคเรียน	40%
1.1.1 ความตั้งใจ ความสนใจเรียน	10%
1.1.2 งานที่มอบหมายในระหว่างเรียน (assignment)	10%
1.1.3 โครงการรายกลุ่ม (project)	10%
1.2 คะแนนกลางภาคเรียน	30%
1.3 คะแนนปลายภาคเรียน	30%

2. การประเมินผล

ใช้วิธีอิงเกณฑ์โดยเปรียบเทียบระดับคะแนนที่กำหนดเพื่อให้เกรดดังนี้

ระดับคะแนน	ความหมายของผลการศึกษา	ค่าร้อยละ	ค่าระดับคะแนน
A	ดีเยี่ยม	86.00 – 100	4.00
A-	ดีเยี่ยม	82.00 – 85.00	3.75
B+	ดีมาก	78.00 – 81.00	3.50
B	ดี	74.00 – 77.00	3.00
B-	ค่อนข้างดี	70.00 – 73.00	2.75
C+	ปานกลางค่อนข้างดี	66.00 – 69.00	2.50
C	ปานกลาง	62.00 – 65.00	2.00
C-	ปานกลางค่อนข้างอ่อน	58.00 – 61.00	1.75
D+	ค่อนข้างอ่อน	54.00 – 57.00	1.50
D	อ่อน	50.00 – 53.00	1.00
D-	อ่อนมาก	46.00 – 49.00	0.75
F	ตก	00.00 – 45.00	0.00

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	(1)
แผนบริหารการจัดการเรียนรู้	(2)
แผนบริหารการสอนประจำวิชา	(11)
สารบัญ	(16)
สารบัญรูป	(20)
สารบัญตาราง	(21)
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1	1
บทที่ 1 บทนำ	3
ธรรมชาติของคณิตศาสตร์	3
โครงสร้างของคณิตศาสตร์	4
ปฏิทรรศน์	7
ความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์	9
การจัดการเรียนรู้แบบ 5E	11
สรุป	12
คำถามท้ายบท	13
เอกสารอ้างอิง	14
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2	15
บทที่ 2 ตรรกศาสตร์	17
ประพจน์	17
สมมูลของประพจน์	24
สัจนิรันดร์	27
การอ้างเหตุผลและการพิสูจน์	31
ตัวบ่งปริมาณ	35
การจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์	42
สรุป	45
คำถามท้ายบท	46
เอกสารอ้างอิง	50

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3	51
บทที่ 3 ระเบียบวิธีการพิสูจน์	53
การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข	54
การพิสูจน์ข้อความแบบแจกแจงกรณี	58
การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้	61
การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง	65
การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้อย่างเดียว	68
การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	70
สรุป	77
คำถามท้ายบท	77
เอกสารอ้างอิง	80
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4	81
บทที่ 4 เซต	83
การดำเนินการบนเซต	86
ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันเพิ่มเติม	90
ผลคูณคาร์ทีเซียน	97
การจัดการเรียนรู้เรื่องเซต	101
สรุป	103
คำถามท้ายบท	104
เอกสารอ้างอิง	106
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5	107
บทที่ 5 ความสัมพันธ์	109
นิยามและตัวอย่างของความสัมพันธ์	109
ความสัมพันธ์สมมูล	124
การเรียงอันดับบางส่วน	128
สรุป	132
คำถามท้ายบท	133

เอกสารอ้างอิง	135
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6	137
บทที่ 6 ฟังก์ชัน	139
นิยามและชนิดของฟังก์ชัน	139
ฟังก์ชันค่าจริงและพีชคณิตของฟังก์ชัน	146
ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ	152
ภาพและภาพผกผัน	160
การดำเนินทวิภาค	166
การจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน	173
สรุป	175
คำถามท้ายบท	176
เอกสารอ้างอิง	180
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7	181
บทที่ 7 เซตจำกัดและเซตอนันต์	183
การเทียบเท่าของเซต	183
เซตจำกัด	185
เซตอนันต์	191
เซตนับได้	193
เซตนับไม่ได้	196
สรุป	198
คำถามท้ายบท	198
เอกสารอ้างอิง	199
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8	201
บทที่ 8 ระบบจำนวนจริง	203
สัญพจน์สนาม	203
กฎไตรวิภาค	208
ค่าสัมบูรณ์	212

	หน้า
สัจพจน์ความบริสุทธิ์	215
การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนจริง	223
สรุป	226
คำถามท้ายบท	227
เอกสารอ้างอิง	229
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 9	231
บทที่ 9 จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น	233
การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน	234
มอดุลัสและสังยุค	238
กราฟของจำนวนเชิงซ้อน	244
จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	247
การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	255
สรุป	258
คำถามท้ายบท	259
เอกสารอ้างอิง	262
บรรณานุกรม	263

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1 แผนภาพแสดงโครงสร้างทางคณิตศาสตร์	4
2 ตัวอย่างรูปภาพที่เกิดปฏิทรรศน์	8
3 แผนภาพแสดงโครงสร้างวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู	10
4 แผนภาพแสดงกรณีของประพจน์เชิงประกอบที่มีประพจน์ย่อย p, q และ r	23
5 แผนภาพต้นไม้แสดงค่าความจริงของประพจน์ย่อยโดยวิธีขัดแย้งของ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$	30
6 แผนภาพต้นไม้แสดงค่าความจริงของประพจน์ย่อยโดยวิธีขัดแย้งของ $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$	31
7 แผนภาพต้นไม้แสดงค่าความจริงของประพจน์ย่อยโดยวิธีขัดแย้งของ $(p \vee q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$	32
8 แผนภาพต้นไม้แสดงว่าค่าความจริงข้อความ $x + y = 0$ เมื่อ $U = \{-1, 0, 1\}$	40
9 การเปรียบเทียบหลักโดมิโนกับหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	70
10 แผนภาพต้นไม้แสดงสับเซตทั้งหมดของเซต $\{1, 2, 3\}$	87
11 แผนภาพการดำเนินการระหว่างเซต	88
12 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ $r = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$	109
13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $y = x$	110
14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $y = x^2$	110
15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $x < y$	111
16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $x \mid y$	111
17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $2 \mid (x - y)$	112
18 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $y = x^2 + 1$	114
19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = 9$	115
20 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $4x^2 + 9y^2 = 36$	116
21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ r และ r^{-1} เมื่อ $r = \{(1, 2), (1, 4), (2, 5), (4, 5), (3, 8)\}$	117
22 กราฟแสดงความสัมพันธ์ r และ r^{-1} เมื่อ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$	118
23 กราฟแสดงความสัมพันธ์ r และ r^{-1} เมื่อ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$	118
24 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s	119
25 แผนภาพตัวอย่างแสดงความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s	119
26 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ $(s \circ r)^{-1}$ และ $r^{-1} \circ s^{-1}$	120
27 แผนภาพแสดงสมบัติของความสัมพันธ์	121

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
28 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ f, g และ h	140
29 แผนภาพแสดง input และ output ของฟังก์ชัน	141
30 แผนภาพแสดงเครื่องจักรที่ประกอบด้วยจาก f และ g	154
31 แผนภาพแสดงฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$	155
32 แผนภาพแสดงตัวอย่างฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$	155
33 แผนภาพแสดงภาพและภาพผกผัน	160
34 แผนภาพแสดง $\{1, 2, 3\} \sim \{a, b, c\}$	183
35 แผนภาพแสดงการจับคู่ของจำนวนนับกับจำนวนคู่	184
36 แผนภาพแสดง $\mathbb{N}_5 \sim \{2, 4, 6, 8, 10\}$	186
37 แผนภาพการสร้างฟังก์ชัน $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}_{n+m}$	189
38 แผนภาพการสร้างฟังก์ชัน $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}_{nm}$	190
39 แผนภาพการสร้างฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$	199
40 แสดงการนับสมาชิกของเซต $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	195
41 แสดงจุด (a, b) บนระนาบเชิงซ้อน	238
42 แสดงสังยุคและมอดุลัสบนระนาบเชิงซ้อน	239
43 แสดงความสัมพันธ์จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว	247
44 แสดงผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว	248
45 แสดงรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว	252

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1 ค่าความจริงของข้อความรวม $p \wedge q$	19
2 ค่าความจริงของข้อความเลือก $p \vee q$	19
3 ค่าความจริงของข้อความแบบมีเงื่อนไข $p \rightarrow q$	20
4 ค่าความจริงของข้อความแบบผันกลับได้ $p \leftrightarrow q$	21
5 ค่าความจริงของ $\sim p$	21
6 ความสัมพันธ์ของจำนวนประพจน์กับจำนวนกรณีของค่าความจริง	22
7 ตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p \rightarrow r) \vee (p \leftrightarrow q)$	23
8 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \rightarrow q$ และ $\sim q \rightarrow \sim p$	24
9 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \vee q$ และ $\sim p \rightarrow q$	24
10 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow r$ และ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	25
11 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \rightarrow (p \vee q)$	28
12 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \wedge \sim p$	28
13 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$	28
14 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \wedge (p \rightarrow q)$	33
15 ตารางแสดงค่าความจริงของประโยคเปิด $x > 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$	35
16 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $x > 0$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$	37
17 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $x < 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$	38
18 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$ เมื่อ $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	38
19 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$ เมื่อ $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	38
20 ตารางแสดงค่าของ $n(n + 1)$ เมื่อ $n = -2, -1, 0, 1, 2$	39

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า
21 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางเรื่องตรรกศาสตร์	42
22 ค่าความจริงของประพจน์ $p(x, y)$	43
23 ตารางจุดของประพจน์ $x + y = 0$	43
24 สรุปค่าความจริงของประพจน์ $p(x, y)$ โดยใช้ตารางจุด	44
25 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางเรื่องเซต	101
26 สรุปสมบัติความสัมพันธ์	122
27 ผลการแบ่งกันจำนวนเต็มออกเป็น 3 ส่วน	125
28 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางเรื่องฟังก์ชัน	173
29 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางเรื่องจำนวนจริง	218
30 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางเรื่องจำนวนเชิงซ้อน	255

สารบัญ

1	บทนำ	3
1.1	ธรรมชาติของคณิตศาสตร์	3
1.2	โครงสร้างของคณิตศาสตร์	4
1.3	ปฏิทรรศน์	7
1.4	ความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์	9
1.5	การจัดการเรียนรู้แบบ 5E	11
2	ตรรกศาสตร์	17
2.1	ประพจน์	17
2.2	สมมูลของประพจน์	24
2.3	สัจนิรันดร์	27
2.4	การอ้างเหตุผลและการพิสูจน์	31
2.5	ตัวบ่งปริมาณ	35
2.6	การจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์	42
3	ระเบียบวิธีการพิสูจน์	53
3.1	การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข	54
3.2	การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี	58
3.3	การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้	61
3.4	การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง	65
3.5	การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้เพียงอย่างเดียว	68
3.6	การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	70
4	เซต	83
4.1	การดำเนินการบนเซต	86
4.2	ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันเพิ่มเติม	90
4.3	ผลคูณคาร์ทีเซียน	97
4.4	การจัดการเรียนรู้เรื่องเซต	101

5	ความสัมพันธ์	109
5.1	บทนิยามและตัวอย่างของความสัมพันธ์	109
5.2	ความสัมพันธ์สมมูล	124
5.3	การเรียงอันดับบางส่วน	128
6	ฟังก์ชัน	139
6.1	นิยามและชนิดของฟังก์ชัน	139
6.2	ฟังก์ชันค่าจริงและพีชคณิตของฟังก์ชัน	146
6.3	ฟังก์ชันผกผันและประกอบ	152
6.4	ภาพและภาพผกผัน	160
6.5	การดำเนินการทวิภาค	166
6.6	การจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน	173
7	เซตจำกัดและเซตอนันต์	183
7.1	การเทียบเท่าของเซต	183
7.2	เซตจำกัด	185
7.3	เซตอนันต์	191
7.4	เซตนับได้	193
7.5	เซตนับไม่ได้	196
8	ระบบจำนวนจริง	203
8.1	สัจพจน์สนาม	203
8.2	กฎไตรวิภาค	208
8.3	ค่าสมบูรณ์	212
8.4	สัจพจน์ความบริบูรณ์	215
8.5	การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนจริง	223
9	จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น	233
9.1	การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน	234
9.2	มอดุลัสและสังยุค	238
9.3	กราฟของจำนวนเชิงซ้อน	244
9.4	จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	247
9.5	การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	255

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ธรรมชาติของคณิตศาสตร์
2. โครงสร้างของคณิตศาสตร์
3. ปฏิทรรศน์
4. ความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์
5. การจัดการเรียนรู้แบบ 5E

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
2. เข้าใจปฏิทรรศน์ที่เกิดขึ้นในคณิตศาสตร์
3. เห็นถึงความสำคัญของวิชาหลักการคณิตศาสตร์
4. รู้จักการจัดการเรียนรู้แบบ 5E

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
- 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
- 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
- 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "บทนำของวิชาหลักการคณิตศาสตร์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "บทนำของวิชาหลักการคณิตศาสตร์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. ภาพการเกิดปฏิทรรศน์ในสาขาต่างๆ

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ระบบสัจพจน์ ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ และกล่าวถึงความขัดแย้งกันแต่จริงที่เรียกว่า ปฏิทรรศน์ (Paradox) สุดท้ายกล่าวถึงความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์ และการจัดการเรียนรู้แบบ 5E ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป

1.1 ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

มนุษย์สนใจสิ่งที่อยู่รอบตัวและพยายามที่เข้าใจธรรมชาติหรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น จึงมักจะตั้งคำถามและพยายามหาคำตอบหรือคำอธิบายสิ่งเหล่านั้น นักคณิตศาสตร์เป็นกลุ่มหนึ่งที่พยายามจะอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นว่าเกิดจากอะไร เพื่อให้เข้าใจสิ่งเหล่านั้นให้ชัดเจนยิ่งขึ้น แล้วนำไปสรุปเป็นกฎเกณฑ์ต่าง ๆ เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ คนทั่วไปอาจจะมองว่าคณิตศาสตร์หมายถึงตัวเลขหรือการคำนวณเท่านั้น แท้จริงแล้วคณิตศาสตร์รวมถึงการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลด้วย คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาศาสตร์ต่าง ๆ ทำให้เกิดการพัฒนาเทคโนโลยีและสร้างนวัตกรรมใหม่ ๆ ในปัจจุบัน การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องเข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์เพื่อประโยชน์ในการนำไปใช้ให้ถูกต้องเหมาะสมต่อไป

แม้ความหมายและขอบเขตของคณิตศาสตร์จะเปลี่ยนแปลงไปตามมุมมองของมนุษย์ในแต่ละยุค แต่ลักษณะธรรมชาติของคณิตศาสตร์ที่ยังเป็นจริงในทุกยุค (อัมพร ม้าคนอง. 2558. หน้า2) มีดังนี้

1. คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม

คณิตศาสตร์ได้ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ในการสื่อความหมาย ใช้จำนวนในการแทนปริมาณมากหรือน้อย

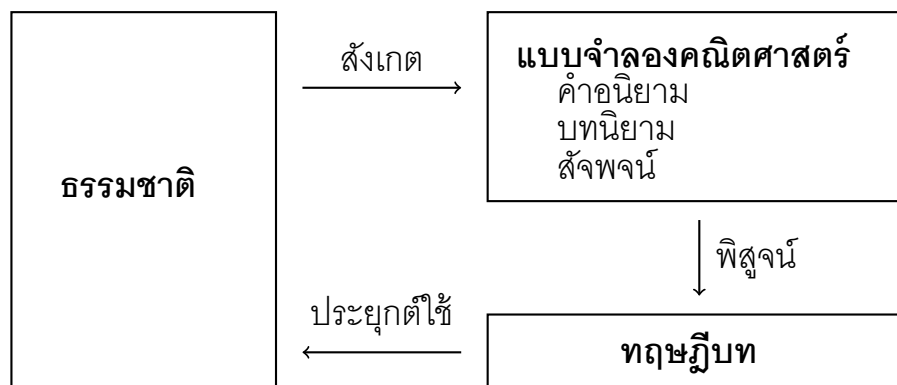
2. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่แสดงความเป็นเหตุเป็นผล

ข้อความที่ถูกยอมรับในทางคณิตศาสตร์สามารถอธิบายได้อย่างมีเหตุมีผลกันที่เรียกว่าการพิสูจน์ โดยไม่ขัดแย้งกันเอง

3. คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นสากล
คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สามารถใช้งานได้อย่างกว้างขวาง เช่น คำนิยามจำนวนคู่ และ เครื่องหมาย + เป็นที่เข้าใจกันทั่วโลก
4. คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง
คณิตศาสตร์มีความสวยงามของรูปทางด้านเรขาคณิตต่าง ๆ ซึ่งปรากฏตามธรรมชาติมากมาย
5. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง
คณิตศาสตร์มีโครงสร้างและแบบแผนชัดเจน เช่นระบบจำนวนจริงประกอบด้วยประเภทของจำนวนต่าง ๆ โดยระบุไว้อย่างชัดเจน

1.2 โครงสร้างของคณิตศาสตร์

โครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้นเกิดจากการที่มนุษย์สังเกตความเป็นไปในธรรมชาติ โดยพิจารณาปัญหาเหล่านั้นแล้วสรุปในรูปนามธรรม แล้วสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ประกอบไปด้วย คำนิยาม คำนิยาม หรือ/และบทนิยาม สัจพจน์ แล้วพิสูจน์ข้อความที่สนใจโดยใช้ตรรกศาสตร์จนออกมาเป็น ทฤษฎีบทหรือกฎ แล้วนำกฎเหล่านั้นไปประยุกต์ใช้ในธรรมชาติต่อไป ดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 1 แผนภาพแสดงโครงสร้างของคณิตศาสตร์

การศึกษาสิ่งต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์จะเริ่มต้นด้วยการกำหนด **คำนิยาม** ซึ่งหมายถึงคำหรือกลุ่มคำที่ตกลงกันว่าไม่ต้องให้คำจำกัดความ เพราะเข้าใจตรงกันได้เป็นสากล ต่อมากำหนดคำใหม่ขึ้นมาเรียกว่า **คำนิยาม** ส่วนข้อความที่อธิบายความหมายอย่างสั้น ๆ รัดกุมของคำนิยามเรียกว่า บทนิยาม จากนั้นถ่ายทอดความคิดที่บ่งบอกลักษณะและการมีจริงของสิ่งนั้นออกมาเป็นข้อความที่รัดกุม เรียกข้อความเหล่านี้ว่า **สัจพจน์** ยิ่งสัจพจน์ใกล้เคียงกับแนวคิดที่เป็นธรรมชาติของมนุษย์เท่าไร ก็จะทำให้ยอมรับการมีจริงของสิ่งที่กำหนดโดยสัจพจน์ดังกล่าวมากขึ้นเท่านั้น (พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. 2558. คำนำ) สุดท้ายใช้ตรรกศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่สนใจโดยอาศัย คำนิยาม คำนิยาม และสัจพจน์ หรือทฤษฎีบทที่เคยพิสูจน์ไว้ก่อนหน้านี้ ข้อความนี้จะถูกเรียกว่า **ทฤษฎีบท** ระบบที่เกิดขึ้นในลักษณะเช่นนี้เรียกว่า **ระบบสัจพจน์** (Axiomatic system) ดังนั้นระบบสัจพจน์ประกอบไปด้วย

1. **คำนิยาม (Undefined term)** คือคำสามัญพื้นฐานที่ไม่สามารถอธิบายด้วยคำอื่นอย่างรัดกุม และเราก็คุ้นเคยกันมาจนเป็นที่เข้าใจตรงกันแล้ว เพราะถ้าต้องนิยามคำทุก ๆ คำที่จะใช้ก็จะทำให้เกิดการใช้คำที่ไม่ทราบความหมายไปนิยามคำอีกคำหนึ่ง หรือกล่าวอีกนัยก็คือคำหรือกลุ่มคำที่ตกลงกันว่าไม่ต้องให้คำจำกัดความ เพราะเข้าใจตรงกันได้เป็นสากล ตัวอย่างทั่วไปเช่น พ่อ แม่ สีขาว เป็นต้น ตัวอย่างทางเรขาคณิตเช่น จุด เส้น มุม ระนาบ เป็นต้น
2. **คำนิยาม (Defined term)** เป็นคำที่ถูกสร้างขึ้นโดยคำนิยาม และ/หรือคำนิยามที่มีมาก่อนด้วยข้อความสั้น ๆ แต่รัดกุม ข้อความที่นำมาอธิบายคำนิยามเรียกว่า **บทนิยาม (Definition)** บทนิยามที่ดีควรให้ความหมายของคำนิยามเพียงความหมายเดียว ต้องไม่ประกอบด้วยข้อความขัดแย้งกันเองเมื่อกำหนดบทนิยามขึ้นแล้วต้องบอกได้ว่าสิ่งใดเป็นสิ่งใดไม่เป็น ดังตัวอย่างเช่น บทนิยามของจำนวนคู่และจำนวนคี่

จำนวนคู่ (Even number) คือจำนวนเต็มที่สามารถเขียนในรูป $2k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

จำนวนคี่ (Odd number) คือจำนวนเต็มที่สามารถเขียนในรูป $2k + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

ในวิชาทฤษฎีจำนวนให้ความหมายของจำนวนคู่ไว้ว่า "จำนวนคู่คือจำนวนเต็มที่ 2 หารลงตัว" เมื่อพิจารณาบทนิยามนี้ต้องให้ความหมายของคำว่า "หารลงตัว" เพื่อไม่ให้เกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อนเมื่อนำไปใช้ ดังนั้นจะให้ความหมายของการหารลงตัวก่อนนิยามจำนวนคู่ และนิยามจำนวนคี่คือจำนวนเต็มที่ 2 หารไม่ลงตัว แต่ถ้านิยามจำนวนคี่เป็น "จำนวนคี่คือจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนคู่" ต้องอธิบายคำว่าไม่ใช่จำนวนคู่เพิ่มเติม ซึ่งมีความยุ่งยากในการนำไปใช้ อาจเกิดความสับสนได้ง่ายจึงไม่นิยมเขียนนิยามดังกล่าว จะเห็นได้ว่าการเขียนบทนิยามทางคณิตศาสตร์นั้นมีความสำคัญอย่างยิ่ง ต้องเขียนให้เข้าใจตรงกันโดยอาศัย คำนิยาม และคำนิยามที่มีมาก่อน เพื่อให้บทนิยามเหล่านั้นสมบูรณ์และเป็นที่ยอมรับ

3. **สัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate)** คือข้อความที่ยอมรับโดยไม่ต้องพิสูจน์ เป็นสิ่งพื้นฐานที่นักคณิตศาสตร์จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ เช่น **สัจพจน์เปอาโน (Peano's postulates)** ซึ่งกำหนดโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีที่ชื่อว่า จูเซปเป เปอาโน (Giuseppe Peano: 1858-1932) กล่าวถึงสิ่งที่กำหนดการมีจริงของจำนวนธรรมชาติ (Natural number) ไว้ 5 ข้อดังนี้

(P1) มีจำนวนธรรมชาติที่เรียกว่า **ศูนย์ (Zero)** เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

(P2) จำนวนธรรมชาติทุกจำนวนต้องมี **ตัวตามหลัง (Successor)** ที่เป็นจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียวเท่านั้น

(P3) ศูนย์ไม่เป็นตัวตามหลังของจำนวนธรรมชาติใด

(P4) ถ้าจำนวนธรรมชาติสองจำนวนมีตัวตามหลังตัวเดียวกัน แล้วจำนวนธรรมชาติทั้งสองย่อมเป็นจำนวนเดียวกัน

- (P5) ถ้าเซต S เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติที่สอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้
- (1) 0 เป็นสมาชิกของ S
 - (2) ถ้า n เป็นสมาชิกของ S แล้วตัวตามหลังของ n เป็นสมาชิกของ S
- จะได้ว่าเซต S เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด

ในที่นี้ให้ **ศูนย์**เป็นคำนิยามซึ่งเป็นจำนวนเริ่มต้นของจำนวนธรรมชาติ และ**ตัวตามหลัง**เป็นอีกคำนิยามซึ่งคือจำนวนที่ถัดจากตัวที่สนใจ เช่น 1 เป็นตัวตามหลังของ 0 ซึ่งจะเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

จะเห็นว่าทั้ง 5 ข้อสอดคล้องกับสมบัติของจำนวนธรรมชาติ ทำให้สัจพจน์ดังกล่าวได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวาง รวมถึงการนำไปสร้างทฤษฎีบทต่าง ๆ ของจำนวนธรรมชาติและสร้างระบบจำนวนจริง โดยเฉพาะ P5 นำไปใช้เป็นวิธีพิสูจน์ที่เรียกว่า อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction) ต่อไปจะกล่าวถึงสัจพจน์ที่สำคัญอีก 2 สัจพจน์คือ

สัจพจน์ยุคลิด (Euclid's postulates) คือสิ่งที่กำหนดการมีจริงของเรขาคณิต (Geometry)

- (E1) สามารถลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง
- (E2) สามารถต่อส่วนเส้นตรงออกไปได้ไม่มีที่สิ้นสุด
- (E3) สามารถสร้างวงกลมได้เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลาง และระยะทางเป็นรัศมี
- (E4) มุมฉากทุกมุมเท่ากัน
- (E5) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงอีกสองเส้น ทำให้มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันน้อยกว่า 2 มุมฉาก ถ้าต่อเส้นตรงทั้งสองออกไปเรื่อย ๆ เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันทางด้านที่มีมุมน้อยกว่ารวมกันน้อยกว่าสองมุมฉาก

สัจพจน์สนาม (Field axioms) คือสิ่งที่กำหนดการมีจริงของระบบจำนวนจริงที่ประกอบด้วยเซตการดำเนินการบวกและคูณ โดยมีสมบัติดังนี้

- (R1) ทุกจำนวนจริง x และ y จะได้ $x + y$ และ $x \cdot y$ เป็นจำนวนจริง
- (R2) ทุกจำนวนจริง x และ y จะได้ $x + y = y + x$ และ $x \cdot y = y \cdot x$
- (R3) ทุกจำนวนจริง x, y และ z จะได้ $(x + y) + z = x + (y + z)$ และ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (R4) ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง 0 จะได้ $x + 0 = x = 0 + x$
- (R5) ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง 1 จะได้ $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
- (R6) ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y จะได้ $x + y = 0 = y + x$
- (R7) ทุกจำนวนจริง $x \neq 0$ มีจำนวนจริง y จะได้ $x \cdot y = 1 = y \cdot x$
- (R8) ทุกจำนวนจริง x, y และ z จะได้ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

สัจพจน์ยุคคิดเป็นสัจพจน์ที่มีการยอมรับมานับพันปี และนำไปสร้างสมบัติต่าง ๆ ทางเรขาคณิตมากมาย ในส่วนของสัจพจน์สนามเป็นข้อตกลงเบื้องต้นที่จะใช้ในการพิสูจน์สมบัติทางพีชคณิต จะกล่าวโดยละเอียดเรื่องระบบจำนวนจริง (บทที่ 8)

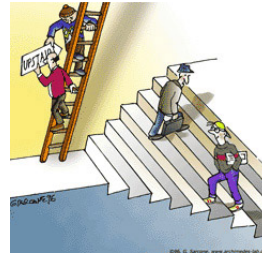
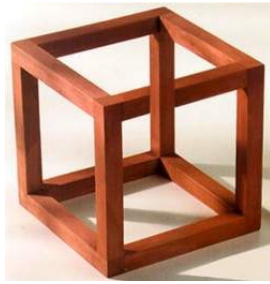
4. **ทฤษฎีบท (Theorem)** คือข้อความที่พิสูจน์ได้ด้วย คำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และ/หรือ ทฤษฎีบทที่มีมาก่อน ภายใต้กฎเกณฑ์ทางตรรกศาสตร์ ทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียงเช่น ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต เป็นต้น ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทบางทฤษฎีบทประกอบด้วยการพิสูจน์ที่มีความซับซ้อนและมีหลายขั้นตอน อาจนำความจริงขั้นตอนเหล่านั้นมาสรุปเพื่อนำไปอ้างอิงบทพิสูจน์ ทฤษฎีบทภายหลัง ความจริงของขั้นตอนที่แยกออกมาเรียกว่า **บทตั้ง (Lemma)** การพิสูจน์บทตั้งยังมีประโยชน์ในลักษณะที่ต้องมีการใช้บทตั้งเดียวกันไปพิสูจน์หลายทฤษฎีบท ซึ่งสามารถถูกนำเอาไปใช้ได้ง่ายขึ้น อย่างไรก็ตามบทตั้งบางบทก็มีข้อยกเว้น คือเป็นบทตั้งที่สมมูลรูปแบบในตัวเช่นเดียวกับทฤษฎีบท อาทิ บทตั้งซอร์น (Zorn's lemma) และหลังจากพิสูจน์ทฤษฎีบทแล้วพบว่ามีความจริงบางประการเป็นผลพลอยได้ หรือเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทนั้น อาจถูกนำมาเขียนขึ้นใหม่เรียกว่า **บทแทรก (Corollary)** โดยการพิสูจน์มักจะสั้นและกระชับ ข้อความบางอย่างที่คาดคะเนว่าน่าจะเป็นจริงตามประสบการณ์ แต่ยังไม่มีการพิสูจน์ตามหลักเกณฑ์ทางตรรกศาสตร์ และยังไม่เคยปรากฏความขัดแย้ง เรียกว่า **ข้อความคาดการณ์ (Conjecture)** การตรวจสอบว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริงหรือไม่ ต้องใช้วิธีการพิสูจน์ที่ยอมรับตามหลักตรรกศาสตร์ เมื่อได้รับการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ก็จะเปลี่ยนเป็น **ทฤษฎีบท** ในที่สุด หรือไม่ก็หา ตัวอย่างค้าน (Counter example) เพื่อทำให้ข้อความคาดการณ์นั้นไม่จริง เช่น **ข้อความคาดการณ์ของแฟร์มา (Fermat's conjecture)** ที่กล่าวไว้ว่า

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 แล้วสมการ $x^n + y^n = z^n$
ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์

ซึ่งแฟร์มาตั้งข้อสังเกตเพิ่มจากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส (กรณี $n = 2$) และเขายืนยันว่าพิสูจน์ได้สำเร็จแล้ว แต่มีนักคณิตศาสตร์เห็นบทพิสูจน์ในกรณีที่ $n = 4$ เท่านั้น ต่อมานักคณิตศาสตร์รุ่นหลัง ๆ ช่วยกันพิสูจน์จนเสร็จสมบูรณ์ในปี ค.ศ. 1994 ปัญหานี้ใช้เวลากว่า 300 ปี เพื่อเป็นเกียรติแก่แฟร์มาจึงเรียกข้อความคาดการณ์นี้ว่า **ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มา (Fermat's last theorem)**

1.3 ปฏิทรรศน์

ปฏิทรรศน์ (Paradox) คือประโยคหรือข้อความที่เกิดขัดแย้งในตัวเอง หรือความขัดแย้งกันแต่จริง หรือข้อความที่มีลักษณะย้อนแย้งในตัวเอง หมายถึงเหตุการณ์ของประโยคที่เป็นจริงชัดเจนแต่สุดท้ายนำไปสู่ความขัดแย้งในตัวเอง (<http://mathworld.wolfram.com/Paradox.html> สืบค้น มีนาคม 2559)



รูปที่ 2 ตัวอย่างรูปภาพที่เกิดปฏิกิริยา

(ที่มา <http://mathminton.blogspot.com/2010/11/paradox-incpetion.html> สืบค้น มีนาคม 2559)

ต่อไปจะกล่าวถึงปฏิกิริยาที่มีชื่อเสียงในเรื่องทฤษฎีเซต นำเสนอโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ชื่อว่า เบอร์แทรนด์ รัสเซลล์ (Bertrand Russell) ในปี ค.ศ. 1901 ซึ่งต่อมาเรียกว่า ปฏิกิริยารัสเซลล์ (Russell's paradox) เขาได้ยกตัวอย่างสถานการณ์ในหมู่บ้านเล็ก ๆ แห่งหนึ่งที่มีช่างตัดผมเพียงคนเดียว ช่างตัดผมคนนั้นกล่าวขึ้นมานว่า

“ผู้ชายทุกคนในหมู่บ้านถ้าไม่ตัดผมเอง ก็ต้องถูกช่างตัดผมเป็นคนตัดให้”

คำถามคือ ใครเป็นคนตัดผมช่างตัดผม พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

- ถ้าเขาตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาเป็นคนที่ไม่ได้ตัดผมของตนเอง
- ถ้าเขาไม่ได้ตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาถูกตนเองตัดผมให้

จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งเพราะเขาเป็นทั้งช่างตัดผมขณะเดียวกันก็เป็นผู้ชายในหมู่บ้าน การพูดประโยคดังกล่าวจึงเกิดปฏิกิริยาขึ้น บางครั้งจะเรียกว่า ปฏิกิริยาช่างตัดผม (Barber paradox)

รัสเซลล์ได้อธิบายว่าเกิดปฏิกิริยาชนิดนี้ในสัจพจน์ข้อที่ 2 ของคันทอร์ที่ชื่อว่า the axiom of abstraction (เกอร์ก คันทอร์ (Georg Cantor) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ผู้ริเริ่มใช้คำว่าเซตและเป็นผู้วางรากฐานและศึกษาเรื่องเซตอย่างจริงจัง หรือจะกล่าวได้ว่าเขาคือคนที่ทรงอิทธิพลในเรื่องทฤษฎีเซต) ที่กล่าวไว้ว่า

" เมื่อกำหนดสมบัติใดย่อมมีเซตประกอบด้วยสมบัตินั้น ๆ เสมอ "

เซต ๆ หนึ่งนิยามโดยเซตทุกเซตที่ไม่ได้มีตัวเองเป็นสมาชิก จะพบปัญหาคือเซตนั้นมีตนเองเป็นสมาชิกหรือไม่ นั่นคือสามารถสร้างเซต

$$\{X | X \notin X\}$$

ลักษณะนี้ได้หรือไม่ ทำให้เกิดปฏิกิริยาของรัสเซลล์ขึ้น ดังนั้นไม่สามารถสร้างเซตของเซตที่มีสมาชิกเป็นตัวเองได้นั่นเอง

การนำเสนอปฏิกิริยาของรัสเซลล์ทำให้นักคณิตศาสตร์ต้องระมัดระวังมากขึ้น เมื่อจะนิยามหรือสร้างระบบสัจพจน์ใหม่ ๆ ในทางคณิตศาสตร์ เพื่อไม่ให้ขัดแย้งกันเองอันจะนำไปสู่การไม่ยอมรับทางคณิตศาสตร์

ในปี 1905 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ จูลส์ ริชาร์ด (Jules Richard) ได้นำเสนอปฏิกิริยาในด้านประโยคทางตรรกศาสตร์ ตัวอย่างเช่น มีนักศึกษาผู้หนึ่งพูดขึ้นว่า

" นักศึกษาทุกคนพูดโกหก "

ประโยคนี้อาจสรุปได้ว่านักศึกษาคณะนี้พูดจริงหรือพูดโกหก พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

- ถ้านักศึกษาคณะนี้พูดจริง แสดงว่านักศึกษาคณะนี้พูดโกหก
- ถ้านักศึกษาคณะนี้พูดโกหก แสดงว่านักศึกษาคณะนี้พูดจริง

จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งเพราะนักศึกษาคณะนี้พูดประโยคนี้อ้างถึงนักศึกษาทุกคนอันหมายรวมถึงตัวเขาเอง เข้าไปด้วย เรียกปฏิทรรศน์นี้ว่า **ปฏิทรรศน์ของริชาร์ด (Richard's paradox)**

ปฏิทรรศน์มีอีกหลายรูปแบบซึ่งพบเจอในสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น

1. กรณีที่มีการย้อนกลับไปแก้ไขเหตุการณ์ในอดีต ที่จะส่งผลให้เกิดเหตุการณ์ในปัจจุบัน เช่น การย้อนกลับไปฆ่าพ่อแม่ของตนเองก่อนที่ตนจะเกิด ก็เกิดข้อขัดแย้งทางเวลาว่า ตัวของเราเกิดมาได้อย่างไร เมื่อพ่อแม่ถูกฆ่าไปแล้ว เรียกว่า ปฏิทรรศน์เวลา (Time paradox) หรือปฏิทรรศน์คุณปู่ (Grandfather paradox)
2. ปฏิทรรศน์ฝาแฝด (Twin paradox) ซึ่งเป็นผลลัพธ์อันน่าฉงนที่สุดอันหนึ่งในทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ในสาขาวิทยาศาสตร์
3. ปฏิทรรศน์เพชรกับน้ำ (Diamond-water paradox) ในวิชาเศรษฐศาสตร์ กล่าวถึงกรณีที่ทำไมน้ำจึงถูกกว่าเพชร ทั้ง ๆ ที่คนต้องการน้ำมากกว่า
4. ปฏิทรรศน์ซีโน (Zeno's paradox) ในวิชาปรัชญา กล่าวถึงข้อสรุปที่ฟังดูแล้วขัดกันของซีโน จากตัวอย่างอันมีชื่อเสียงที่สุดของเขาก็คือ **อาคิลลีส (Achilles) แข่งกับเต่า** กล่าวคือ " เต่าแข่งกับอาคิลลีส โดยเต่าบอกให้อาคิลลีสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคิลลีสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคิลลีสว่า ถ้าอาคิลลีสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคิลลีสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก "

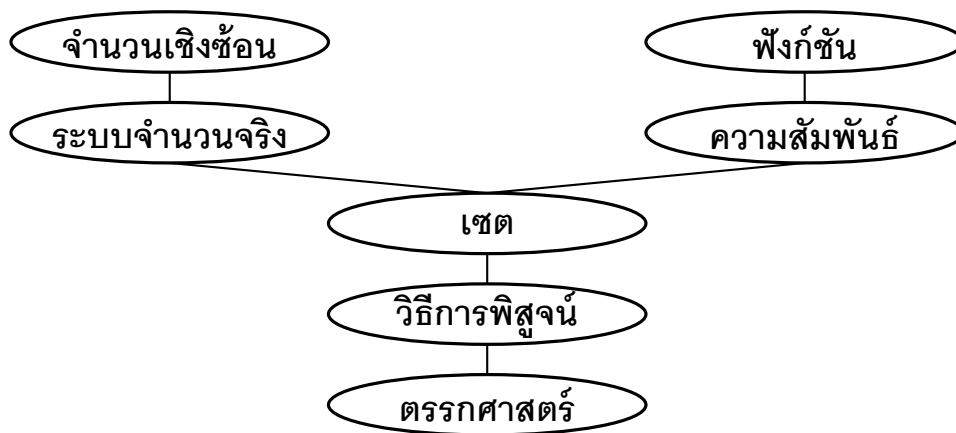
1.4 ความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์

เมื่อกล่าวถึงคณิตศาสตร์หลายคนคงนึกถึงตัวเลขหรือการคำนวณ ซึ่งเป็นผลมาจากความคุ้นเคยในการพบเห็นและใช้งานในชีวิตประจำวัน แท้จริงแล้วคณิตศาสตร์ไม่ได้หมายถึงตัวเลขและการคำนวณเพียงอย่างเดียว แต่หมายรวมถึงการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ และมีโครงสร้างที่ชัดเจน เพื่ออธิบายสิ่งต่าง ๆ ที่สร้างขึ้นอย่างรัดกุมและนำไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ หรือทำให้เราเข้าใจธรรมชาติยิ่งขึ้น

การเรียนคณิตศาสตร์นั้น ผู้เรียนต้องมีความรู้ความเข้าใจหลักพื้นฐานเป็นอย่างดีเสียก่อน จึงจะทำให้สามารถเรียนต่อในระดับสูงขึ้นไปได้ ซึ่งพื้นฐานเหล่านั้นเรียกว่า "หลักการคณิตศาสตร์" ดังมีการเปรียบเทียบในหนังสือหลักคณิตศาสตร์ของ กรรณิการ์ กวัคเพทวร์ย์ (2542) กล่าวคือ "หลักการคณิตศาสตร์" ถ้าเปรียบกับต้นไม้ ก็เหมือนส่วนที่เป็น "รากแก้ว" ของต้นไม้ ซึ่งถ้ารากแก้วของต้นไม้แข็งแรง หยั่งลงลึก ต้นไม้ก็จะสามารถเติบโตจากต้นไม้เล็กเป็นต้นไม้ใหญ่ที่มั่นคง แข็งแรง เป็นที่พึ่งพิงของสรรพสิ่ง และช่วยจรรโลง

โลกให้สวยงามน่าอยู่ คณิตศาสตร์ก็เช่นกัน ถ้าผู้ใดมีความรู้ความเข้าใจ "หลักการคณิตศาสตร์" อย่างลึกซึ้งและแม่นยำแล้ว ผู้นั้นก็ย่อมจะมีความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์หรือศาสตร์อื่นที่สูงขึ้นไปได้อย่างดี

หลักการคณิตศาสตร์นั้นต้องเริ่มต้นจากความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับตรรกศาสตร์เป็นอันดับแรก ซึ่งเป็นข้อตกลงเบื้องต้นที่จะใช้ในการเรียนรู้เรื่องต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ จึงกล่าวได้ว่าตรรกศาสตร์เป็นพื้นฐานอย่างแรกที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการเข้าใจคณิตศาสตร์ระดับสูงนั่นเอง แผนภาพต่อไปนี้แสดงถึงความสัมพันธ์ของเนื้อหาในแต่ละเรื่องของหลักการคณิตศาสตร์ ซึ่งจะกล่าวไว้ในตำราเล่มนี้



รูปที่ 3 แผนภาพแสดงโครงสร้างวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู

เห็นได้ว่าตรรกศาสตร์เป็นพื้นฐานที่สำคัญในแต่ละเรื่อง เมื่อมีความเข้าใจเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ดีแล้วจะนำไปอ้างเหตุผลหรือการพิสูจน์ซึ่งเป็นเครื่องมือในการตรวจสอบข้อความทางคณิตศาสตร์ ทำให้เกิดการยอมรับข้อความต่าง ๆ ที่กล่าวอ้างว่าเป็นจริง ต่อมาพื้นฐานเกี่ยวกับเซตซึ่งเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของหลักการคณิตศาสตร์ เพราะทุกอย่างในคณิตศาสตร์ล้วนสัมพันธ์เกี่ยวกับเซตทั้งสิ้น จึงถือว่าเซตเป็นมูลฐาน (Fundamental) ทางคณิตศาสตร์ เพราะว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ล้วนมีเซตเข้ามาเกี่ยวข้องเป็นพื้นฐานเกือบทั้งหมด ความสัมพันธ์ในธรรมชาติที่พบเจอมีมากมาย ความสัมพันธ์เหล่านั้นไม่ต่างจากคณิตศาสตร์เท่าไรนัก เพียงแต่ในคณิตศาสตร์มีการนิยามที่รัดกุมและสร้างสัญลักษณ์ขึ้นมาเพื่อใช้อธิบายให้สะดวกในการนำไปใช้งาน และศึกษาสมบัติต่าง ๆ เพื่ออธิบายสิ่งต่าง ๆ อย่างเป็นระบบ และพื้นฐานในการนิยามฟังก์ชันอันเปรียบเหมือนเครื่องจักรเมื่อ นำเข้า (Input) สิ่งเดียวกันเข้าไปแล้วย่อมได้ นำออก (Output) สิ่งเดียวกันเสมอ เช่น เครื่องคิดเลขเมื่อเรากดตามเมื่อกดแป้น $1+2$ เข้าในเครื่องเมื่อแล้วกดเครื่องหมายเท่ากับ จะมีผลลัพธ์คือ 3 เสมอ ฟังก์ชันนั้นเป็นพื้นฐานสำคัญอีกอย่างหนึ่งที่จำเป็นต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับสูง อันจะทำให้เข้าใจคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ในส่วนของหัวข้อระบบจำนวนจริงกล่าวถึงสัญพจน์สนามอันเป็นข้อตกลงในเบื้องต้นของระบบ แล้วนำไปพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของจำนวนจริงอันเป็นต้นแบบในการศึกษาระบบอื่น ๆ ต่อไป เช่น ระบบจำนวนเชิงซ้อน

จากที่กล่าวมาหลักการคณิตศาสตร์นั้นมีความสำคัญ อันจะเป็นพื้นฐานดังรากแก้วที่จะทำให้ต้นไม้เติบโตและแข็งแรง และแผ่กิ่งก้านปกคลุมไปทั่วทุกทิศทาง ซึ่งเป็นประโยชน์แก่ตนเองและสังคมได้ ผู้เรียน

ควรให้นักศึกษาขยันทบทวนเพื่อทำความเข้าใจให้ลึกซึ้งอันจะทำให้เกิดประโยชน์ในการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับต่อไปได้

1.5 การจัดการเรียนรู้แบบ 5E

ในวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู มีเนื้อหาบางส่วนที่สอดคล้องกับเนื้อหาในระดับมัธยมศึกษา ประกอบไปด้วย ตรรกศาสตร์ เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ระบบจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น ซึ่งบรรจุไว้ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งจะกล่าวละเอียดในแต่ละบทต่อไป ดังนั้นในหัวข้อนี้ผู้เขียนจะกล่าวถึงการจัดการเรียนรู้ในเรื่องเหล่านั้น เพื่อเป็นแนวทางแก่ผู้เรียน

ในการจัดการเรียนรู้เรื่องต่าง ๆ ผู้สอนสามารถจัดให้ผู้เรียนได้รู้จักการกำหนดปัญหา และได้ลงมือศึกษา สำรวจ เพื่อแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง โดยแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E (5E Model) เป็นรูปแบบการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2546) ประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญดังนี้

1. **ขั้นสร้างความสนใจ (Engagement)** เป็นการนำเข้าสู่บทเรียนหรือเรื่องที่สนใจซึ่งเกิดขึ้นจากความสงสัย หรืออาจเริ่มจากความสนใจของตัวนักเรียนเองหรือเกิดจากการอภิปรายภายในกลุ่ม เรื่องที่น่าสนใจอาจมาจากเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอยู่ในช่วงเวลานั้น หรือเป็นเรื่องที่เชื่อมโยงกับความรู้เดิมที่เพิ่งเรียนรู้มาแล้ว เป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนสร้างคำถาม กำหนดประเด็นที่ศึกษา ในกรณีที่ไม่มีประเด็นใดที่น่าสนใจ ครูอาจให้ศึกษาจากสื่อต่าง ๆ หรือเป็นผู้กระตุ้นด้วยการเสนอด้วยประเด็นขึ้นมาก่อน แต่ไม่ควรบังคับให้นักเรียนยอมรับประเด็นหรือคำถามที่ครูกำลังสนใจเป็นเรื่องที่จะใช้ศึกษา เมื่อมีคำถามที่น่าสนใจและนักเรียนส่วนใหญ่ยอมรับให้เป็นประเด็นที่ต้องการศึกษา จึงร่วมกันกำหนดขอบเขตและแจกแจงรายละเอียดของเรื่องที่จะศึกษาให้มีความชัดเจนมากขึ้น อาจรวมทั้งการรับรู้ประสบการณ์เดิม หรือความรู้จากแหล่งต่าง ๆ ที่จะช่วยให้นำไปสู่ความเข้าใจเรื่องหรือประเด็นที่จะศึกษามากขึ้น และมีแนวทางที่ใช้ในการสำรวจตรวจสอบอย่างหลากหลาย
2. **ขั้นสำรวจค้นหา (Exploration)** เมื่อทำความเข้าใจในประเด็นหรือคำถามที่สนใจจะศึกษาอย่างถ่องแท้แล้ว ก็มีการวางแผนกำหนดแนวทางสำหรับการตรวจสอบตั้งสมมติฐาน กำหนดทางเลือกที่เป็นไปได้ ลงมือปฏิบัติเพื่อเก็บรวบรวมข้อมูล ข้อเสนอแนะ หรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ วิธีการตรวจสอบอาจทำได้หลายวิธี เช่นทำการทดลอง ทำกิจกรรมภาคสนาม การใช้คอมพิวเตอร์เพื่อช่วยสร้างสถานการณ์จำลอง (Simulation) การศึกษาหาข้อมูลจากเอกสารอ้างอิงหรือจากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งข้อมูลอย่างเพียงพอที่จะใช้ในขั้นต่อไป
3. **ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป (Explanation)** เมื่อได้ข้อมูลอย่างเพียงพอจากการสำรวจตรวจสอบแล้ว จึงนำข้อมูลข้อเสนอแนะที่ได้วิเคราะห์ แปลผล สรุปผลและนำเสนอผลที่ได้ในรูปแบบต่าง ๆ เช่น บรรยายสรุป สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หรือรูปวาด สร้างตาราง เป็นต้น การค้นพบในขั้นนี้

อาจเป็นไปได้หลายทาง เช่น สนับสนุนสมมติฐานที่ตั้งไว้ ได้แย้งกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ หรือไม่เกี่ยวข้อง กับประเด็นที่ได้กำหนดไว้ แต่ผลที่ได้จะอยู่ในรูปใดก็สามารถสร้างความรู้และช่วยให้เกิดการเรียนรู้ ได้

4. **ขั้นขยายความรู้ (Elaboration)** เป็นการนำความรู้ที่สร้างขึ้นไปเชื่อมโยงกับความรู้เดิมหรือความคิดที่ได้ค้นคว้าเพิ่มเติมหรือนำแบบจำลองหรือข้อสรุปที่ได้ไปใช้อธิบายสถานการณ์หรือเหตุการณ์อื่น ๆ ถ้าใช้อธิบายเรื่องต่าง ๆ ได้มากก็แสดงว่าข้อจำกัดน้อย ซึ่งจะช่วยให้เชื่อมโยงกับเรื่องต่าง ๆ และทำให้เกิดความรู้กว้างขวางขึ้น
5. **ขั้นประเมิน (Evaluation)** เป็นการประเมินการเรียนรู้ด้วยกระบวนการต่าง ๆ ว่านักเรียนมีความรู้ อะไรบ้าง อย่างไร และมีความรู้มากน้อยเพียงใด จากขั้นนี้จะนำไปสู่การนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ใน เรื่องอื่น ๆ การนำความรู้หรือแบบจำลองไปใช้อธิบายหรือประยุกต์ใช้กับเหตุการณ์หรือเรื่องอื่น ๆ จะ นำไปสู่ข้อโต้แย้งหรือข้อจำกัดซึ่งจะก่อให้เกิดประเด็นหรือคำถาม หรือปัญหาที่จะต้องสำรวจตรวจสอบต่อไป ทำให้เกิดเป็นกระบวนการที่ต่อเนื่องกันไปเรื่อย ๆ จึงเรียกว่า วงจรการสอบถาม (Inquiry cycle) กระบวนการสืบเสาะหาความรู้จะช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ทั้งเนื้อหาหลักและหลักการ ทฤษฎี ตลอดจนลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ได้ความรู้ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการเรียนต่อไป

กระบวนการจัดการเรียนรู้แบบ 5E เป็นรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่เน้น การพัฒนาความสามารถในการ แก้ปัญหา ด้วยวิธีการฝึกให้ผู้เรียนรู้จักศึกษาค้นคว้าหาความรู้โดยผู้สอนตั้งคำถาม เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้ กระบวนการทางความคิดหาเหตุผลจนพบความรู้หรือแนวทางในการแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง สรุป เป็นหลักการ กฎเกณฑ์ หรือวิธีการในการแก้ปัญหาและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการควบคุม ปรับปรุง เปลี่ยนแปลง หรือสร้างสรรค์ สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง (พัชร์มณฑา ศรีสว่าง, ประสิทธิ์ ทองแจ่ม และ สุรพล เนาวรัตน์. 2558)

สรุป

ในบทแรกของตำราเล่มนี้จะชี้ให้เห็นถึงธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ อันมีแนวคิดจาก การสังเกตธรรมชาติ จนได้มาซึ่งคำนิยามและระบบสัจพจน์ รวมถึงการสร้างบทนิยาม ทฤษฎีบท และ การคาดการณ์ข้อความที่คิดว่าจะเป็นจริงโดยผ่านกระบวนการพิสูจน์คือการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ จนสุดท้ายออกมาเป็นทฤษฎีบท หรือไม่ข้อคาดการณ์นั้นก็เป็นที่ชัดเจนเมื่อมีผู้พบตัวอย่างอย่างค้ำน แต่การ กำหนดสัจพจน์บางอย่างอาจจะทำให้เกิดข้อขัดแย้งที่เป็นจริงที่เรียกว่าปฏิทรรศน์ เช่นสัจพจน์ข้อที่ 2 เขตของคันทอรีในเรื่องทฤษฎีเซต ทำให้นักคณิตศาสตร์ต้องระมัดระวังการกำหนดสัจพจน์ต่าง ๆ มากยิ่ง ขึ้น ประเด็นสุดท้ายในบทนี้ก็คือความสำคัญของหลักการคณิตศาสตร์ ได้อธิบายให้เห็นว่าเป็นรากฐานที่ สำคัญของคณิตศาสตร์ ซึ่งจะนำไปใช้ทำความเข้าใจในคณิตศาสตร์ระดับสูงต่อไป

คำถามท้ายบท

1. จากคำกล่าวที่ว่า "คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง" จงยกตัวอย่างพร้อมอธิบายโดยสังเขป
2. จงบอกองค์ประกอบของระบบสัจพจน์
3. จงยกตัวอย่างสัจพจน์ที่คุณรู้จักมาอย่างน้อย 2 สัจพจน์
4. จงอธิบายปฏิทรรศน์ของแต่ละเหตุการณ์ต่อไปนี้
 - 4.1 ชายคนหนึ่งสอบถามนาย A และ B นาย A พูดว่า "นาย B พูดแต่เรื่องโกหก" ส่วนนาย B ก็พูดว่า "นาย A พูดแต่ความจริง" แล้วใครพูดความจริง ใครพูดโกหกกันแน่
 - 4.2 จระเข้ขโมยลูกของชายผู้หนึ่งไป แต่มันให้คำสัญญาว่า มันจะคืนลูกให้หากชายผู้นั้นทนายใจมัน ได้ถูกต้องว่ามันจะทำอะไร ชายผู้นั้นเดาใจมันว่า "เขาจะไม่ได้ลูกกลับคืนมา"
 - 4.3 เต่าแข่งกับอาคีลีส โดยเต่าบอกให้อาคีลีสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคีลีสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคีลีสว่า ถ้าอาคีลีสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคีลีสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก อาคีลีสจะชนะเต่าได้หรือไม่

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2558). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ : วี.พริ้นท์(1991).
- อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- พัทธรณิกา ศรีสว่าง, ประสิทธิ์ ทองแจ่ม และ สุรพล เนาวรัตน์. (2558). **ผลการใช้กระบวนการจัดการเรียนรู้แบบ 5E วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเซต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม ปีที่ 9 ฉบับพิเศษ เมษายน พ.ศ. 2558.
- Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd.
- <http://mathworld.wolfram.com/Paradox.html> สืบค้น มีนาคม 2559.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ประพจน์
2. สมมูลของประพจน์
3. สัจนิรันดร์
4. การอ้างเหตุผล
5. ตัวบ่งปริมาณ
6. การจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. บอกได้ว่าประโยคใดเป็นประพจน์
2. ตรวจสอบได้ว่าประพจน์ใดสมมูลกัน
3. ตรวจสอบได้ว่าประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์
4. สามารถอ้างเหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล
5. สามารถเขียนข้อความในรูปตัวบ่งปริมาณได้
6. เข้าใจการจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
- 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
- 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
- 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "ตรรกศาสตร์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "ตรรกศาสตร์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 2

ตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ เมื่อแปลตามพจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2554 หมายถึงปรัชญาสาขาหนึ่งว่าด้วยการคิดหาเหตุผลว่าจะสมเหตุสมผลหรือไม่ ตรงกับคำว่า **logic** ในภาษาอังกฤษ ตรรกศาสตร์นั้นมีบทบาทสำคัญต่อการกำหนดโครงสร้างของการเขียนข้อความทางคณิตศาสตร์ รวมถึงการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบเพื่อยืนยันว่าข้อความเหล่านั้นเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ตรรกศาสตร์มีบทบาทสำคัญมากในการทำให้เราได้ข้อสรุปและข้อโต้แย้งต่าง ๆ จากเหตุที่เรามี และยังมีส่วนอย่างมากในการทำให้เราได้กฎเกณฑ์และทฤษฎีบทต่าง ๆ ทั้งในด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล และสามารถนำไปประยุกต์ได้อย่างถูกต้องและเกิดประโยชน์ (กรรณิกา กวักเพฑูรย์. 2542. หน้า1) จะเห็นได้ว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นล้วนมาจากการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ทั้งสิ้น จึงเป็นหลักการที่ทุกคนต้องยอมรับเพื่อให้ได้มาซึ่งความจริงเหล่านั้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงประพจน์ การนำประพจน์เหล่านั้นมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม ศึกษาประพจน์ที่มีความหมายเดียวกันหรือเรียกว่าประพจน์ที่สมมูลกัน ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเพียงอย่างเดียวที่เรียกว่าสัจนิรันดร์ กล่าวถึงการอ้างเหตุผลอย่างสมเหตุสมผลอันเป็นพื้นฐานของวิธีการพิสูจน์ในบทต่อไป และการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์โดยใช้ตัวบ่งปริมาณ สุดท้ายจะนำเสนอตัวอย่างแนวการสอนตรรกศาสตร์ในระดับมัธยมสำหรับครูคณิตศาสตร์

2.1 ประพจน์

ประโยคในบทนิยามหรือทฤษฎีบทในทางคณิตศาสตร์ อาจเหมือนประโยคทั่วไปแต่จริงแล้วมีลักษณะการเขียนเฉพาะตัว โดยที่ข้อความเหล่านั้นถูกเขียนตามหลักตรรกศาสตร์ จะทำให้สื่อความหมายของผู้เขียนได้อย่างถูกต้อง ด้วยเหตุนี้จึงต้องศึกษารูปแบบของข้อความทางตรรกศาสตร์เพื่อนำไปใช้ได้ถูกต้อง

ข้อความที่น่าสนใจทางคณิตศาสตร์เป็นข้อความที่เราตัดสินใจได้ว่า ต้องเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น จะเป็นทั้งสองอย่างไม่ได้ กล่าวคือถ้าข้อความใดไม่เป็นจริงแล้วข้อความนั้นต้องเป็นเท็จในนัยกลับกัน ถ้าข้อความใดไม่เป็นเท็จแล้วข้อความนั้นต้องเป็นจริง (พัฒน์ อุดมกะวานิช. 2559. หน้า 2) เรียกข้อความหรือประโยคเหล่านั้นว่า **ประพจน์ (Proposition หรือ Statement)** ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.1 ประพจน์ คือประโยคหรือข้อความที่มีค่าความจริง (Truth value) เป็นจริง (True) หรือค่าความจริงเป็นเท็จ (False) อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง 2.1.2 จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้นี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์ให้บอกค่าความจริงของประพจน์เหล่านั้น

- | | | |
|--|----------------|---------------------|
| 1. พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก | เป็นประพจน์ | ค่าความจริงเป็นจริง |
| 2. เขาเป็นคนอังกฤษ | ไม่เป็นประพจน์ | |
| 3. กรุณา เปิดหน้าต่างให้ฉันหน่อย | ไม่เป็นประพจน์ | |
| 4. คุณมาทำอะไรที่นี่ | ไม่เป็นประพจน์ | |
| 5. จังหวัดเลยไม่อยู่ในภาคเหนือของประเทศไทย | เป็นประพจน์ | ค่าความจริงเป็นเท็จ |
| 6. คุณพระช่วย ! | ไม่เป็นประพจน์ | |
| 7. พี่ต้องพาฉันไปดูหนังนะ | ไม่เป็นประพจน์ | |
| 8. $x > 1$ | ไม่เป็นประพจน์ | |
| 9. จำนวนเฉพาะทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่ | เป็นประพจน์ | ค่าความจริงเป็นเท็จ |

จากตัวอย่าง 2.1.2 ข้อ 3 เป็นประโยคขอร้อง ข้อ 4 เป็นประโยคคำถาม ข้อ 7 เป็นประโยคคำสั่ง และข้อ 6 เป็นคำอุทาน ไม่เป็นประพจน์เพราะไม่สามารถหาค่าความจริงได้ ในส่วนของข้อ 2 "เขาเป็นคนอังกฤษ" ถ้า "เขา" หมายถึง ณเดช ข้อความนี้จะเป็นประพจน์เพราะมีค่าความจริงเป็นเท็จ จะเรียก "เขา" ว่าตัวแปร ในทำนองเดียวกันข้อ 8 มี x เป็นตัวแปร ถ้าทราบว่า x คืออะไรจะทำให้ข้อความดังกล่าวเป็นประพจน์ ข้อความลักษณะนี้เรียกว่า **ประโยคเปิด (Open sentence)** ดังจะกล่าวต่อไปในบทนิยาม 2.5.1

จากตัวอย่าง 2.1.2 ข้อ 1, 5 และ 9 เป็นประโยคเดี่ยวที่เป็นประพจน์ซึ่งเรียกว่า **ประพจน์เชิงเดี่ยว (Single statement)** ต่อไปจะกล่าวถึงประพจน์ที่มี **ตัวเชื่อม (Connective)** เรียกว่า **ประพจน์เชิงประกอบ (Compound statement)** ตัวเชื่อมประพจน์มี 5 ชนิดคือ

- | | | | | |
|--------|---------|---------------|---------------|----------|
| 1. และ | 2. หรือ | 3. ถ้า...แล้ว | 4. ก็ต่อเมื่อ | 5. นิเสธ |
|--------|---------|---------------|---------------|----------|

บทนิยาม 2.1.3 ให้ p, q เป็นประพจน์ **ข้อความเชื่อม (Conjunction)** ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$$p \wedge q \quad \text{อ่านว่า} \quad p \text{ และ } q \quad (p \text{ and } q)$$

จะมีค่าความจริงเป็นจริงได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริง

สรุปค่าความจริงในแต่ละกรณีตามตารางดังต่อไปนี้ซึ่งเรียกว่า **ตารางค่าความจริง (Truth table)** เมื่อ p และ q เป็นประพจน์ และ T แทนค่าความจริงเป็นจริง F แทนค่าความจริงเป็นเท็จ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตารางที่ 1 ค่าความจริงของข้อความร่วม $p \wedge q$

ตัวอย่าง 2.1.4 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. อังกฤษเป็นประเทศในยุโรปและไทยเป็นประเทศเอเชีย ค่าความจริงเป็นจริง
2. 2 เป็นจำนวนคู่ และ 1.2 เป็นจำนวนนับ ค่าความจริงเป็นเท็จ
3. $2 \neq 3$ และ $2 \neq 2$ ค่าความจริงเป็นเท็จ

บทนิยาม 2.1.5 ให้ p, q เป็นประพจน์ **ข้อความเลือก (Disjunction)** ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$p \vee q$ อ่านว่า p หรือ q (p or q)

จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ สรุปค่าความจริงในแต่ละกรณีตามตารางดังต่อไปนี้

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตารางที่ 2 ค่าความจริงของข้อความเลือก $p \vee q$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. ประเทศไทยติดกับประเทศลาวหรือญี่ปุ่นเป็นประเทศในเอเชีย ค่าความจริงเป็นจริง
2. 2 เป็นจำนวนคี่ หรือ 3 เป็นจำนวนคู่ ค่าความจริงเป็นเท็จ
3. $8 < 8$ หรือ $8 = 8$ ค่าความจริงเป็นจริง

บทนิยาม 2.1.7 ให้ p, q เป็นประพจน์ **ข้อความแบบเงื่อนไข (Conditional statement/Implication)** ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$p \rightarrow q$ อ่านว่า ถ้า p แล้ว q (if p then q)

เรียก p ว่า **เหตุ (Hypothesis)** และเรียก q ว่า **ผล (Conclusion)** จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ และเรียก $q \rightarrow p$ ว่า **บทกลับ (Converse)** ของ $p \rightarrow q$ สรุปค่าความจริงในแต่ละกรณีตามตารางดังต่อไปนี้

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตารางที่ 3 ค่าความจริงของข้อความแบบมีเงื่อนไข $p \rightarrow q$

เราอาจจะพบข้อความ $p \rightarrow q$ ในรูปแบบอื่น ๆ เช่น

q ถ้า p (q if p)

p ทำให้ได้ q (p implies q)

p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอของ q (p is a sufficient condition for q)

q เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นของ p (q is a necessary condition for p)

ตัวอย่าง 2.1.8 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

- | | |
|--|---------------------|
| 1. ถ้า iPhone เป็นโทรศัพท์ แล้ววฟเป็นสัตว์น้ำ | ค่าความจริงเป็นจริง |
| 2. ถ้า 2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 1 เป็นจำนวนนับ | ค่าความจริงเป็นจริง |
| 3. ถ้า $1 + 3 + 5 = 9$ แล้ว $2 \times 3 = 23$ | ค่าความจริงเป็นเท็จ |
| 4. ถ้า $9 \cdot 0 = 9$ แล้วเชียงใหม่อยู่ภาคใต้ของประเทศไทย | ค่าความจริงเป็นจริง |

จากบทนิยามของตัวเชื่อมข้างต้นจะได้ข้อสังเกตดังต่อไปนี้ เมื่อให้ p เป็นประพจน์ใด ๆ

- $F \wedge p$ มีค่าความจริงเป็น F
- $T \vee p$ มีค่าความจริงเป็น T
- $F \rightarrow p$ มีค่าความจริงเป็น T
- $p \rightarrow T$ มีค่าความจริงเป็น T

บทนิยาม 2.1.9 ให้ p, q เป็นประพจน์ **ข้อความแบบเงื่อนไขสองทาง** (Biconditional statement) ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$$p \leftrightarrow q \quad \text{อ่านว่า} \quad p \text{ ก็ต่อเมื่อ } q \quad (p \text{ if and only if } q, \quad p \text{ iff } q)$$

เป็นการเชื่อมกันของสองเงื่อนไขคือ $(p \rightarrow q)$ และ $\wedge(q \rightarrow p)$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริงเหมือนกับข้อความ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ สรุปค่าความจริงในแต่ละกรณีตามตารางดังต่อไปนี้

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ตารางที่ 4 ค่าความจริงของข้อความแบบผันกลับได้ $p \leftrightarrow q$

ตัวอย่าง 2.1.10 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

- | | |
|---|---------------------|
| 1. 1 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 5 เป็นจำนวนนับ | ค่าความจริงเป็นเท็จ |
| 2. สุนัขมีเขา ก็ต่อเมื่อ $1 + 1 = 2$ | ค่าความจริงเป็นเท็จ |
| 3. $2^{-2} = 1$ ก็ต่อเมื่อ $3 > 7$ | ค่าความจริงเป็นจริง |
| 4. $1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ นกขมิ้นบินไม่ได้ | ค่าความจริงเป็นเท็จ |

ต่อไปจะกล่าวถึง **นิเสธของประพจน์** (Negation of proposition) หมายถึงประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์นั้น ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.11 ให้ p เป็นประพจน์ แล้ว **นิเสธของประพจน์** ของ p เขียนแทนด้วย

$$\sim p \quad \text{อ่านว่า} \quad \text{นิเสธ } p \quad (\text{not } p)$$

จะมีค่าความจริงตรงข้ามกับ p

p	$\sim p$
T	F
F	T

ตารางที่ 5 ค่าความจริงของ $\sim p$

ตัวอย่าง 2.1.12 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. อังกฤษเป็นประเทศในทวีปเอเชีย | นิเสธคือ อังกฤษไม่เป็นประเทศในทวีปเอเชีย |
| 2. $\emptyset$ เป็นเซตอนันต์ | นิเสธคือ $\emptyset$ ไม่เป็นเซตอนันต์ |
| 3. นกเขามี 2 ขา | นิเสธคือ นกเขาไม่มี 2 ขา |

เมื่อประพจน์มีการใช้ตัวเชื่อมหลาย ๆ ตัวอาจจะเกิดความสับสนของการพิจารณาค่าความจริง ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงนิยามกำหนดลำดับก่อนหลังของตัวเชื่อมประพจน์ดังนี้

1. $\sim$
2. $\wedge, \vee$ (กรณีมีทั้งสองตัวเชื่อมต้องใส่วงเล็บคั่น)
3. $\rightarrow$
4. $\leftrightarrow$

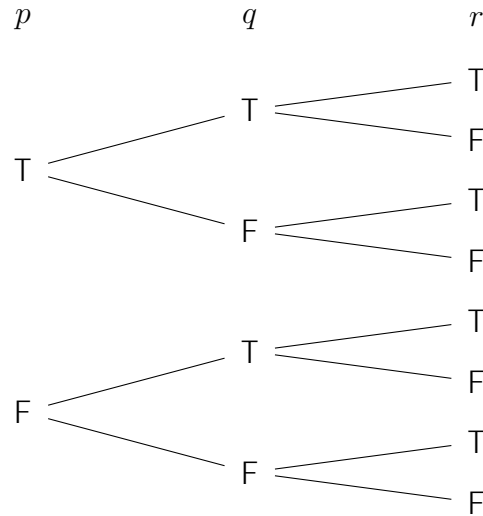
เช่นถ้าเขียน $\sim p \wedge q \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$ จะหมายถึง $[(\sim p) \wedge q] \leftrightarrow [r \rightarrow (\sim p)]$ ในกรณีที่พบตัวเชื่อม $\wedge, \vee$ ผู้เขียนมักต้องใส่วงเล็บเสมอเพื่อหลีกเลี่ยงการตีความหมายผิดไป เช่น $(p \vee q) \wedge r$ แต่จะไม่เขียน $p \vee q \wedge r$ สำหรับประพจน์ที่มีวงเล็บให้ทำในวงเล็บก่อน และตัวเชื่อมในลำดับเดียวกันให้ทำจากซ้ายไปขวา

ตัวอย่าง 2.1.13 จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้ตามลำดับก่อนหลัง

- | | | |
|--|----------|---|
| 1) $\sim r \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow r$ | คำตอบคือ | $[(\sim r) \rightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow r$ |
| 2) $\sim p \wedge \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$ | คำตอบคือ | $[(\sim p) \wedge (\sim r)] \rightarrow [q \wedge (\sim r)]$ |
| 3) $p \wedge \sim r \leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$ | คำตอบคือ | $[p \wedge (\sim r)] \leftrightarrow [(\sim p) \rightarrow (\sim q)]$ |

เนื่องจาก $\sim$ เป็นตัวเชื่อมลำดับแรกจึงมักจะละวงเล็บในการเขียนเช่น $\sim p \rightarrow \sim q$ แทนประพจน์ $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$

การหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบ เมื่อทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อย เป็นการหาค่าความจริงบางกรณีเท่านั้น ในกรณีที่ไมทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อย สามารถสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบได้ เช่นประพจน์เชิงประกอบที่มีประพจน์ย่อย p, q และ r เขียนแผนภาพแสดงกรณีได้ดังนี้



รูปที่ 4 แผนภาพแสดงกรณีของประพจน์เชิงประกอบที่มีประพจน์ย่อย p, q และ r

จะได้ว่าประพจน์เชิงประกอบดังกล่าวมีทั้งหมด 8 กรณี สำหรับประพจน์เชิงประกอบที่มีประพจน์ย่อย n ประพจน์ โดยอาศัยกฎการนับจะได้ 2^n กรณี และสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนประพจน์ย่อย	1	2	3	4	5	6	7	...	n
จำนวนกรณี	2	4	8	16	32	64	128	...	2^n

ตารางที่ 6 ความสัมพันธ์ของจำนวนประพจน์ย่อยกับจำนวนกรณีของค่าความจริง

ตัวอย่าง 2.1.14 ประพจน์ $(p \rightarrow r) \vee (p \leftrightarrow q)$ จะเห็นได้ว่ามีประพจน์ย่อย 3 ประพจน์ ทำให้สร้างตารางค่าความจริงได้ 8 กรณี แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

p	q	r	$p \rightarrow r$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow r) \vee (p \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

ตารางที่ 7 ตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p \rightarrow r) \vee (p \leftrightarrow q)$

2.2 สมมูลของประพจน์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงประพจน์สองประพจน์ที่มีความหมายเดียวกันในทางตรรกศาสตร์ซึ่งจะเรียกว่า **สมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์** (Logically equivalent) ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2.1 ประพจน์ p **สมมูล** (Equivalent) กับ q เขียนแทนด้วย $p \equiv q$ ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันทุกกรณี

ตัวอย่าง 2.2.2 จงแสดงว่า $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$ โดยสร้างตารางค่าความจริง

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ตารางที่ 8 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \rightarrow q$ และ $\sim q \rightarrow \sim p$

ดังนั้น $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ เรียกสมบัตินี้ว่า **กฎแย้งสลับที่** (Contrapositive law) ตัวอย่างเช่น "ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วแดงจะได้กินขนม" โดยใช้กฎแย้งสลับที่จะสมมูลกับ "ถ้าแดงไม่ได้กินขนมแล้วแดงไม่ไปโรงเรียน" เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.2.3 จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

1. $p \vee q$ และ $\sim p \rightarrow q$

วิธีทำ

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

ตารางที่ 9 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \vee q$ และ $\sim p \rightarrow q$

ดังนั้น $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$

2. $(p \vee q) \rightarrow r$ และ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

วิธีทำ

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

ตารางที่ 10 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow r$ และ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ ดังนั้น $(p \vee q) \rightarrow r$ ไม่สมมูลกับ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

การตรวจสอบสมมูลในตัวอย่าง 2.2.3 ทำได้ง่ายเมื่อใช้ตารางค่าความจริง เนื่องจากมีจำนวนประพจน์ย่อยที่ไม่มากนัก แต่เมื่อประพจน์ย่อยมีจำนวนมากจะทำให้กรณีของค่าความจริงมีจำนวนมากตามไปด้วย การตรวจสอบโดยตารางค่าความจริงอาจจะไม่สะดวก จึงต้องศึกษาสมบัติต่าง ๆ เพื่อเป็นเครื่องมือในการตรวจสอบอีกทางหนึ่ง

ต่อไปนี้จะตัวอย่างของประพจน์ที่สมมูลกันสามารถนำไปอ้างได้ ผู้อ่านสามารถตรวจสอบได้จากตารางค่าความจริง เมื่อกำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ จะได้สมมูลดังต่อไปนี้

E1 $p \wedge p \equiv p$

กฎนิพจน์ (Idempotent law)

$p \vee p \equiv p$

E2 $p \wedge q \equiv q \wedge p$

กฎการสลับที่ (Commutative law)

$p \vee q \equiv q \vee p$

E3 $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

E5 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

กฎการแจกแจง (Distributive law)

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

E6 $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law)

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

E7 $\sim (\sim p) \equiv p$

กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)

E8 $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

กฎแย้งสลับที่ (Contrapositive law)

$$E9 \quad p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$E10 \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (q \leftrightarrow p)$$

$$E11 \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$$

$$E12 \quad p \leftrightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

$$E13 \quad p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$E14 \quad p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

$$E15 \quad (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$E16 \quad (p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ p, q เป็นประพจน์ใด ๆ จงแสดงว่า $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \equiv \sim (p \wedge q)$
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) &\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] && \text{โดย } E6 \\ &\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge p] \vee [(p \wedge q) \wedge q] && \text{โดย } E5 \\ &\equiv \sim [(p \wedge p) \wedge q] \vee [(p \wedge q) \wedge q] && \text{โดย } E2 \\ &\equiv \sim [(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] && \text{โดย } E1 \\ &\equiv \sim (p \wedge q) && \text{โดย } E1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2.5 ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด ๆ จงแสดงว่า $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
วิธีทำ

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \rightarrow r &\equiv \sim (p \wedge q) \vee r && \text{โดย } E9 \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r && \text{โดย } E6 \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee r) && \text{โดย } E1 \\ &\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r) && \text{โดย } E2 \\ &\equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) && \text{โดย } E9 \end{aligned}$$

ต่อไปจะกล่าวถึงนิเสธของประพจน์เชิงประกอบของตัวเชื่อมทั้ง 4 ซึ่งสรุปได้ดังต่อไปนี้ (ผู้อ่านสามารถตรวจสอบได้โดยใช้ตารางค่าความจริง) สำหรับประพจน์ p และ q จะได้ว่า

1. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
3. $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
4. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

ตัวอย่าง 2.2.6 ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด ๆ จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

วิธีทำ

1. $p \wedge (\sim q \vee r)$ มีนิเสธคือ

$$\begin{aligned}\sim [p \wedge (\sim q \vee r)] &\equiv \sim p \vee \sim (\sim q \vee r) \\ &\equiv \sim p \vee (q \wedge \sim r)\end{aligned}$$

ดังนั้นนิเสธของ $p \wedge (\sim q \vee r)$ คือ $\sim p \vee (q \wedge \sim r)$

2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ มีนิเสธคือ

$$\begin{aligned}\sim [p \rightarrow (q \rightarrow r)] &\equiv p \wedge \sim (q \rightarrow r) \\ &\equiv p \wedge (q \wedge \sim r)\end{aligned}$$

ดังนั้นนิเสธของ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ คือ $p \wedge (q \wedge \sim r)$

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

- เสื้อเป็นสีแดงและกางเกงเป็นสีดำ
นิเสธคือ เสื้อไม่เป็นสีแดงหรือกางเกงไม่เป็นสีดำ
- $2 > 5$ หรือ 8 เป็นจำนวนคี่
นิเสธคือ $2 \leq 5$ และ 8 ไม่เป็นจำนวนคี่
- ถ้าหนองบอนเป็นจังหวัดแล้วเลยไม่เป็นอำเภอ
นิเสธคือ หนองบอนเป็นจังหวัดและเลยเป็นอำเภอ
- $xy = 12$ ก็ต่อเมื่อ $x = 3$ และ $y = 4$
นิเสธคือ " $xy \neq 12$ ก็ต่อเมื่อ $x = 3$ และ $y = 4$ " หรือ " $xy = 12$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq 3$ หรือ $y \neq 4$ "

2.3 สัจนิรันดร์

ประพจน์บางประพจน์มีค่าความจริงเป็นจริงเพียงอย่างเดียวเพราะรูปแบบของประพจน์นั้น เช่น "2 เป็นจำนวนคู่หรือ 2 เป็นจำนวนคี่" เรียกประพจน์ลักษณะแบบนี้ว่า **สัจนิรันดร์** (Tautology)

บทนิยาม 2.3.1 ประพจน์ที่มีรูปแบบที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอเรียกว่า **สัจนิรันดร์** และเรียกนิเสธของสัจนิรันดร์ว่า **ข้อความขัดแย้ง** (Contradiction)

ตัวอย่าง 2.3.2 จงแสดงว่าประพจน์ $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ ใช้ตารางค่าความจริงแสดงได้ดังนี้

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ตารางที่ 11 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \rightarrow (p \vee q)$

ดังนั้น $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์ เรียกว่า การขยายการเลือก (Addition)

ตัวอย่าง 2.3.3 จงแสดงว่าประพจน์ $p \wedge \sim p$ เป็นข้อความขัดแย้ง

วิธีทำ ใช้ตารางค่าความจริงแสดงได้ดังนี้

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

ตารางที่ 12 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \wedge \sim p$

ดังนั้น $p \wedge \sim p$ เป็นข้อความขัดแย้ง

ตัวอย่าง 2.3.4 จงแสดงว่าประพจน์ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ ใช้ตารางค่าความจริงแสดงได้ดังนี้

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

ตารางที่ 13 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

ดังนั้น $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

จากตัวอย่าง 2.3.4 เมื่อพิจารณา $p \rightarrow q$ และ $\sim p \vee q$ ทั้งสองประพจน์สมมูลกันซึ่งหมายความว่ามีความจริงตรงกันทุกกรณี เมื่อนำทั้งสองประพจน์มาเชื่อมด้วย $\leftrightarrow$ ทำให้สรุปได้ว่า $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ มีความจริงเป็นจริงทุกกรณีหรือเป็นสัจนิรันดร์ ในกรณีทั่วไปจะเห็นได้ว่าถ้า $p \equiv q$ ก็ต่อเมื่อ $p \leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ (ในหนังสือบางเล่มอาจนิยามสมมูลจากข้อสรุปดังกล่าว) ดังนั้นสมมูลของประพจน์ต่าง ๆ ที่เคยกล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2 จะสรุปเป็นสัจนิรันดร์ได้ดังนี้ เมื่อให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ

T1	$p \wedge p \leftrightarrow p$ $p \vee q \leftrightarrow p$	กฎนิพจน์ (Idempotent law)
T2	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$	กฎการสลับที่ (Commutative law)
T3	$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)
T4	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	กฎการแจกแจง (Distributive law)
T5	$\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law)
T6	$\sim (\sim p) \leftrightarrow p$	กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)

ในการทำงานเดียวกันเมื่อพิจารณาค่าความจริงที่ได้จากการเชื่อมทั้งสองประพจน์ด้วย $\rightarrow$ จะได้ข้อสรุปดังนี้

ถ้า $p \equiv q$ แล้ว $p \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

เมื่อ p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ ซึ่งสามารถนำไปใช้ตรวจสอบสัจนิรันดร์ของประพจน์ที่อยู่ในรูปลักษณะดังกล่าวได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3.5 จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

วิธีทำ โดยกฎเดอมอร์แกน $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ ดังนั้น $\sim (p \vee q)$ ไม่สมมูลกับ $p \wedge \sim q$ จะได้ว่า $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

2. $[(p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q)] \leftrightarrow (p \rightarrow r \vee q)$

วิธีทำ จาก E14 จะได้ว่า $(p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow r \vee q)$ ดังนั้น $[(p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q)] \leftrightarrow (p \rightarrow r \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

3. $(p \vee \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

วิธีทำ เนื่องจาก $p \vee \sim q \equiv q \rightarrow p$ จะได้ว่า $(p \vee \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ เป็นสัจนิรันดร์

4. $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)]$

วิธีทำ โดยกฎแย้งสลับที่และกฎเดอมอร์แกนจะได้ว่า $(p \vee q) \rightarrow r \equiv \sim r \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ สรุปได้ว่าข้อความนี้เป็นสัจนิรันดร์

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างสัจนิรันดร์ที่มักนำไปใช้อ้างอิงบ่อยครั้ง ผู้อ่านสามารถตรวจสอบได้โดยใช้ตารางค่าความจริง เมื่อให้ p, q, r เป็นประพจน์ และ c แทนข้อความขัดแย้ง แล้วประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

$$T7 \quad \sim p \vee p \text{ หรือ } \sim (\sim p \wedge p)$$

$$T8 \quad p \rightarrow p$$

$$T9 \quad p \rightarrow p \vee q \quad \text{การขยายการเลือก (Addition)}$$

$$T10 \quad p \wedge q \rightarrow p \quad \text{การทำผลรวมเป็นรูปอย่างง่าย (Simplification)}$$

$$p \wedge q \rightarrow q$$

$$T11 \quad p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q \quad \text{มอดัส โพนนัส (Modus ponens)}$$

$$T12 \quad \sim q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \sim p \quad \text{มอดัส โทเลนส์ (Modus tollens)}$$

$$T13 \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \quad \text{ตรรกบท (Hypothetical syllogism)}$$

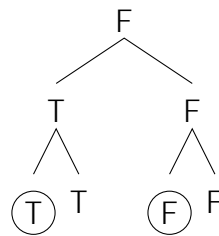
$$T14 \quad (p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q \quad \text{ตรรกบทแบบคัดออก (Disjunctive syllogism)}$$

$$(p \vee q) \wedge \sim q \rightarrow p$$

$$T15 \quad (\sim p \rightarrow c) \rightarrow p$$

เนื่องจากประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์มีค่าความจริงเป็นจริงทุก ๆ กรณี ถ้าสมมติว่ามีกรณีที่ค่าความจริงเป็นเท็จแล้วนำไปสู่ความขัดแย้งแสดงให้เห็นว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จไม่ได้ นั่นคือมีค่าความจริงทุกกรณีหรือเป็นสัจนิรันดร์นั่นเอง เรียกวิธีนี้ว่า **การตรวจสอบสัจนิรันดร์โดยวิธีขัดแย้ง** สำหรับประพจน์ที่ต้องการตรวจสอบอยู่ในรูปแบบ $p \rightarrow q$ หรือ $p \vee q$ ซึ่งทั้ง 2 รูปแบบมีค่าความจริงเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวเท่านั้น ตัวอย่างเช่นการตรวจสอบว่าประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ วิธีทำคือเริ่มโดยการกำหนดค่าความจริงของประพจน์นี้เป็น F และหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยดังแผนภาพต่อไปนี้

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$



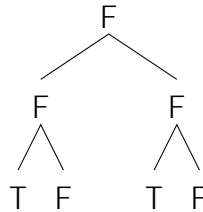
รูปที่ 5 แผนภาพต้นไม้แสดงค่าความจริงของประพจน์ย่อยโดยวิธีขัดแย้งของ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

จากแผนภาพด้านขวามือ p มีค่าความจริงเป็น T ส่วนด้านซ้ายมือมีค่าความจริงเป็น F จึงเกิดข้อขัดแย้งทำให้สรุปได้ว่าประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จไม่ได้ หรือกล่าวได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์ เรียกแผนภาพข้างต้นว่า **แผนภาพต้นไม้ (Tree diagram)** จากตัวอย่างข้างต้นสรุปได้ดังนี้

1. ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อยเป็นไปได้ แสดงว่าประพจน์ดังกล่าว**ไม่เป็นสัจนิรันดร์**
2. ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อยเกิดข้อขัดแย้ง แสดงว่าประพจน์ดังกล่าว**เป็นสัจนิรันดร์**

ตัวอย่าง 2.3.6 จงตรวจสอบข้อความ $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$ ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยวิธีขัดแย้งวิธีทำ

$$(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$$



รูปที่ 6 แผนภาพต้นไม้แสดงค่าความจริงของประพจน์ย่อยโดยวิธีขัดแย้งของ $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$

จากแผนภาพต้นไม้ p มีค่าความจริงเป็น T และ q มีค่าความจริงเป็น F ดังนั้น $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จอย่างน้อย 1 กรณี สรุปได้ว่าประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

2.4 การอ้างเหตุผลและการพิสูจน์

เมื่อมีคนกล่าวว่า "เมื่อใดก็ตามที่ฝนตกการจราจรจะติดขัด" ถ้าวันนี้ฝนตกสามารถสรุปได้หรือไม่ว่าวันนี้การจราจรจะติดขัด ถ้าเขื่อกำกล่าวอ้างข้างต้นว่าเป็นจริงจะสรุปได้ว่าวันนี้การจราจรจะติดขัด จะเรียกว่าอ้างเหตุผลแบบสมเหตุสมผล แต่ถ้าวันนี้การจราจรติดขัดจะสรุปได้หรือไม่ว่าฝนตก คำตอบก็คือไม่สามารถสรุปได้ เนื่องจากไม่สอดคล้องกับคำกล่าวอ้างที่เชื่อว่าเป็นจริง เรียกว่าการอ้างเหตุผลแบบไม่สมเหตุสมผล คำกล่าวอ้างต่าง ๆ ในทางตรรกศาสตร์มีมากมายและซับซ้อนแตกต่างกันไป จึงจำเป็นต้องมีวิธีการตรวจสอบที่เป็นระบบดังจะกล่าวในหัวข้อนี้ สุดท้ายจะให้ความหมายของการพิสูจน์ซึ่งเป็นที่ยอมรับและใช้พิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นจริง

บทนิยาม 2.4.1 การอ้างเหตุผล (Argument) คือการอ้างว่าประพจน์ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ซึ่งจะเรียกว่า เหตุ นั้นสามารถสรุปประพจน์ q ซึ่งจะเรียกว่า ผลสรุป เขียนแทนด้วย

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$$

การอ้างเหตุผลจะ**สมเหตุสมผล (Valid)** ก็ต่อเมื่อ

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$$

เป็นสัจนิรันดร์ นอกเหนือจากนี้เป็นการอ้างเหตุผลที่**ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)**

ตัวอย่าง 2.4.2 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

1. เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim q$

ผล $\sim p$

วิธีทำ โดยใช้ตารางดังนี้

p	q	$(\sim q \wedge p \rightarrow q) \rightarrow \sim p$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

2. เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim p$

ผล $\sim q$

วิธีทำ โดยใช้ตารางดังนี้

p	q	$(\sim p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow \sim q$
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	T

การอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

เนื่องจากเป็นการอ้างเหตุผล $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$ อยู่ในรูป

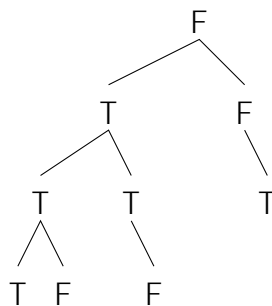
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$$

เพื่อตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์ อาจตรวจสอบโดยใช้วิธีขัดแย้ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.4.3 จงตรวจสอบการอ้างเหตุผล $p \vee q, \sim q \vdash \sim p$ โดยใช้วิธีขัดแย้ง

วิธีทำ ตรวจสอบสัจนิรันดร์ของ $(p \vee q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ โดยวิธีขัดแย้งดังแผนภาพต้นไม้ต่อไปนี้

$$(p \vee q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$$



รูปที่ 7 แผนภาพต้นไม้แสดงค่าความจริงของประพจน์ย่อยโดยวิธีขัดแย้งของ $(p \vee q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$

จากแผนภาพต้นไม้ p มีค่าความจริงเป็น T และ q มีค่าความจริงเป็น F ทำให้ประพจน์ $(p \vee q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จอย่างน้อย 1 กรณี นั่นคือประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์ สรุปได้ว่าการอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

บทนิยาม 2.4.4 ให้ p และ q เป็นประพจน์ กล่าวว่

p **สรุป** q **ได้ในเชิงตรรกศาสตร์** (p logically implies q)

เขียนแทนด้วย $p \Rightarrow q$ ก็ต่อเมื่อประพจน์ $p \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.4.5 ให้ p และ q เป็นประพจน์ จะได้ว่า $p \wedge (p \rightarrow q)$ สรุป q ได้ในเชิงตรรกศาสตร์ แสดงได้โดยตารางค่าความจริงต่อไปนี้

p	q	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$		
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

ตารางที่ 14 ตารางค่าความจริงที่ของประพจน์ $p \wedge (p \rightarrow q)$

ดังนั้น $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$ ซึ่งเรียกว่า **กฎอนุมาน** (Rule of inference) หมายความว่า q เป็นผลเชิงตรรกศาสตร์จากข้อสมมติฐาน p และ $p \rightarrow q$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ข้อสมมติฐาน (Hypothesis) นำไปสู่การสรุปผล q

ทฤษฎีบทในทางคณิตศาสตร์มักอยู่ในรูปมีเหตุสรุปผล เมื่อต้องการแสดงว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริงจึงเพียงพอที่จะสมมติว่าข้อสมมติฐาน p เป็นจริง และใช้กฎทางตรรกศาสตร์ และกฎการอนุมานนำไปสู่ผลสรุป q เป็นจริง เพราะหากกรณีที่ p เป็นเท็จไม่ว่า q จะมีค่าความจริงอย่างไร $p \rightarrow q$ จะเป็นจริงเสมอ

บทนิยาม 2.4.6 จะกล่าว q ว่า **อนุมาน** (Deduce) ได้จาก $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ก็ต่อเมื่อการอ้างเหตุผล $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$ สมเหตุสมผล ถ้ามีลำดับของข้อความ

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$ ลำดับสุดท้าย s_k คือ q

โดยแต่ละลำดับ $s_i, i = 1, 2, \dots, k$ ในลำดับนั้นต้องมีสมบัติอย่างน้อยหนึ่งใน 3 ข้อต่อไปนี้

- (1) s_i เป็นเหตุอันหนึ่ง หรือข้อสมมติฐาน
- (2) s_i เป็นสัจนิรันดร์
- (3) s_i เป็นข้อสรุปเชิงตรรกศาสตร์ (Logical consequence) ของข้อความมาก่อนลำดับนี้

เรียก $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$ ว่า **การพิสูจน์** (Proof) ของ $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q$ เรียก $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n$ ว่า **สมมติฐาน** และ q ว่า **บทสรุป**

ทฤษฎีบท (Theorem) คือประพจน์ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงเสมอจากบทนิยามข้างต้น

ตัวอย่าง 2.4.7 จงแสดงว่า $\sim p$ อนุมานได้จาก $p \rightarrow q, \sim q$

การพิสูจน์

ข้อความที่พิสูจน์

เหตุผล

1. $\sim q$

ข้อสมมติฐาน

2. $p \rightarrow q$

ข้อสมมติฐาน

3. $\sim p$

จาก 1 และ 3 และ โมดัส โทเลนส์ (T12)

ตัวอย่าง 2.4.8 จงพิสูจน์ว่า $[(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$

การพิสูจน์

ข้อความที่พิสูจน์

เหตุผล

1. $p \rightarrow \sim q$

ข้อสมมติฐาน

2. $\sim r \vee q$

ข้อสมมติฐาน

3. r

ข้อสมมติฐาน

4. q

จาก 2 และ 3 และ ตรรกบทแบบคัดออก (T14)

5. $\sim p$

จาก 1 และ 4 และ โมดัส โทเลนส์ (T12)

การพิสูจน์ของ $p \Rightarrow q$ ตามบทนิยาม 2.4.6 จะเรียกว่า **การพิสูจน์ตรง (Direct proof)** แต่อาจจะมีวิธีการพิสูจน์แบบอื่น ๆ หนึ่งในนั้นคือ **การพิสูจน์อ้อม (Indirect proof)** ซึ่งจะทำดังต่อไปนี้ กำหนดให้ c แทนข้อความขัดแย้ง การอ้างเหตุผล $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$ จะสมเหตุสมผล โดยการพิสูจน์ว่าข้อความ

$$\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q) \rightarrow c$$

มีค่าความจริงเป็นจริง (กฎการพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง) นั่นคือ

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \sim q) \rightarrow c$$

มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.4.9 จงพิสูจน์ว่า $p \vee \sim q, q \vdash p$ สมเหตุสมผล

การพิสูจน์ตรง

ข้อความที่พิสูจน์

เหตุผล

1. $p \vee \sim q$

ข้อสมมติฐาน

2. q

ข้อสมมติฐาน

3. p

จาก 1, 2 และ ตรรกบทแบบคัดออก (T14)

การพิสูจน์อ้อม

ข้อความที่พิสูจน์

1. $p \vee \sim q$

2. q

3. $\sim p$

4. $\sim q$

5. $q \wedge \sim q$

6. p

เหตุผล

ข้อสมมติฐาน

ข้อสมมติฐาน

ข้อสมมติฐาน (นิเสธของผลสรุปในการพิสูจน์อ้อม)

จาก 1, 3 และ ตรรกบทแบบคัดออก (T14)

จาก 2 และ 4 (เกิดข้อขัดแย้ง)

กฎการพิสูจน์โดยความขัดแย้งกัน

2.5 ตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 2.5.1 ประโยคเปิด คือประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร (Variable) และเมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ (Universe) แล้วประโยคนั้นจะเป็นประพจน์

นิยมใช้ $p(x)$ แทนประโยคเปิด เพราะค่าความจริงของ $p(x)$ เปลี่ยนไปตามตัวแปร x ดังตัวอย่างให้ $p(x)$ แทนประโยคเปิด $x > 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

x	$p: x > 2$	ค่าความจริง
1	$1 > 2$	F
2	$2 > 2$	F
3	$3 > 2$	T
4	$4 > 2$	T

ตารางที่ 15 ตารางแสดงค่าความจริงของประโยคเปิด $x > 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

จากตารางคือการแสดงค่าความจริงของประโยคเปิด $p(x)$ เปลี่ยนไปตามค่า x ที่อยู่ใน $\{1, 2, 3, 4\}$ ซึ่งเรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์ เขียนแทนด้วย $\mathcal{U}$ เมื่อกล่าวว่

" มี x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$ "

ประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริงเพราะว่ามี $x = 3$ ซึ่งทำให้ $p(3)$ มีค่าความจริงเป็นจริง เขียนแทนคำว่า "มี" ด้วย $\exists$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ ในทำนองเดียวกัน ถ้ากล่าวว่า

" ทุก ๆ x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$ "

ประพจน์นี้จะมีค่าความจริงเป็นเท็จเพราะว่ามี $x = 1$ ที่ทำให้ $p(1)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เขียนแทนคำว่า "ทุก ๆ" ด้วย $\forall$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ เรียกสัญลักษณ์ $\exists$ และ $\forall$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)** และเรียกวิธีการนี้ว่า **วิธีบ่งปริมาณ (Quantification)** ซึ่งมีได้ 2 แบบ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.5.2 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

แบบที่ 1 นำหน้า $p(x)$ ด้วยตัวบ่งปริมาณ

ทุก x ใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ / ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$

สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\forall x \in \mathcal{U} [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x \in \mathcal{U}, p(x)$$

เรียก $\forall$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด** (Universal quantifier)

แบบที่ 2 นำหน้า $p(x)$ ด้วยตัวบ่งปริมาณ

มี x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่ง / บาง x ใน $\mathcal{U}$ มีสมบัติว่า

มีบาง x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\exists x \in \mathcal{U} [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x \in \mathcal{U}, p(x)$$

เรียก $\exists$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง** (Existential quantifier) เรียกสั้น ๆ ว่า **มี**

เพื่อความสะดวกในการเขียนตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ กำหนดให้

$\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

$\mathbb{Q}^c$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

ตัวอย่าง 2.5.3 จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

- | | | |
|---|----------|--|
| 1. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2 = x$ | คำตอบคือ | $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = x$ |
| 2. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะได้ว่า $x > 0$ | คำตอบคือ | $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ |
| 3. จำนวนจริงทุกจำนวนมีค่าเป็นลบเสมอ | คำตอบคือ | $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0$ |
| 4. มีจำนวนตรรกยะที่มีค่าเป็นลบ | คำตอบคือ | $\exists x \in \mathbb{Q}, x < 0$ |
| 5. จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ | คำตอบคือ | $\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \vee x < 0$ |

ตัวอย่าง 2.5.4 จงเปลี่ยนสัญลักษณ์ต่อไปนี้ในรูปข้อความ

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$

คำตอบคือ ทุกจำนวนนับมีค่ามากกว่าหนึ่ง

2. $\exists x \in \mathbb{Z}, (x \neq 1) \rightarrow (x^2 > 1)$

คำตอบคือ มีจำนวนเต็ม x ถ้า $x \neq 1$ แล้ว $x^2 > 1$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, (x < 1) \leftrightarrow (x^2 < x)$

คำตอบคือ ทุกจำนวนจริงบวก x สอดคล้อง $x < 1$ ก็ต่อเมื่อ $x^2 < x$

บทนิยามต่อไปนี้จะเป็นการนิยามค่าความจริงของตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 2.5.5 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

ข้อความ $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ $p(x)$ มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ

ข้อความ $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $p(x)$ มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.5.6 ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\forall x \in \mathcal{U}, x > 0$

วิธีทำ

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
1	$1 > 0$	T
2	$2 > 0$	T
3	$3 > 0$	T
4	$4 > 0$	T

ตารางที่ 16 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $x > 0$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

ดังนั้นข้อความ $\forall x \in \mathcal{U}, x > 0$ มีค่าความจริงเป็นจริง

2. $\exists x \in \mathcal{U}, x < 2$

วิธีทำ

x	ข้อความ $x < 2$	ค่าความจริง
1	$1 < 2$	T
2	$2 < 2$	F
3	$3 < 2$	F
4	$4 < 2$	F

ตารางที่ 17 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $x < 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

ดังนั้นข้อความ $\exists x \in \mathcal{U}, x < 2$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.5.7 ให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall x \in \mathcal{U}, (x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$

วิธีทำ

x	ข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$	ค่าความจริง
-2	$((-2)^2 = -2) \rightarrow (-2 > 0)$	T
-1	$((-1)^2 = -1) \rightarrow (-1 > 0)$	T
0	$(0^2 = 0) \rightarrow (0 > 0)$	F
1	$(1^2 = 1) \rightarrow (1 > 0)$	T
2	$(2^2 = 2) \rightarrow (2 > 0)$	T

ตารางที่ 18 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$ เมื่อ $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

ดังนั้นข้อความ $\forall x \in \mathcal{U}, (x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

2. $[\forall x \in \mathcal{U}, x^2 = x] \rightarrow [\forall x \in \mathcal{U}, x > 0]$

วิธีทำ

x	ข้อความ $x^2 = x$	ค่าความจริง	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-2	$(-2)^2 = -2$	F	$-2 > 0$	F
-1	$(-1)^2 = -1$	F	$-1 > 0$	F
0	$0^2 = 0$	T	$0 > 0$	F
1	$1^2 = 1$	T	$1 > 0$	T
2	$2^2 = 2$	F	$2 > 0$	T

ตารางที่ 19 ตารางแสดงค่าความจริงของข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$ เมื่อ $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

จะได้ว่า $\forall x \in \mathcal{U}, x^2 = x$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $\forall x \in \mathcal{U}, x > 0$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ทำให้สรุปได้ว่า $[\forall x \in \mathcal{U}, x^2 = x] \rightarrow [\forall x \in \mathcal{U}, x > 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ต่อไปพิจารณาค่าความจริงของประพจน์

$$\exists n \in \mathbb{N}, n \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ} \wedge (n + 2) \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

เห็นได้ชัดว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อเลือก $n = 2$ เพราะ 2 เป็นจำนวนเฉพาะและ $2 + 2 = 4$ เป็นจำนวนคู่ แต่เมื่อพิจารณาประพจน์

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 2 \text{ หาร } n(n + 1) \text{ ลงตัว}$$

เมื่อแทนค่าจำนวนเต็ม n ดังตารางต่อไปนี้

n	$n(n + 1)$
-2	2
-1	0
0	0
1	2
2	6

ตารางที่ 20 ตารางแสดงค่าของ $n(n + 1)$ เมื่อ $n = -2, -1, 0, 1, 2$

อาจคาดการณ์ได้ว่าข้อความนี้มีค่าความจริงเป็นจริง ซึ่งการสรุปคำตอบดังกล่าวไม่เป็นที่ยอมรับ เพราะเกิดจากการยกตัวอย่างบางส่วนเท่านั้น แท้จริงแล้วต้องตรวจสอบทุก n ที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจำเป็นต้องมีวิธีการที่รัดกุม นั่นคือ **การพิสูจน์ (proof)** จะกล่าวในบทถัดไป

หลายครั้งมักจะพบประพจน์ที่ซับซ้อนมากขึ้นเช่น "มีจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งซึ่งบวกกับทุกจำนวนเต็มแล้วเท่ากับศูนย์" เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$$

ประพจน์ลักษณะนี้กล่าวได้ว่ามีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

ตัวอย่าง 2.5.8 จงแปลงประพจน์ต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

1. ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y ซึ่ง $x + y = 0$

คำตอบคือ $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$

2. สำหรับจำนวนนับ n และ m จะได้ว่า $n + m > 1$

คำตอบคือ $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}, n + m > 1$

3. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x = y + 1$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม y

คำตอบคือ $\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, x = y + 1$ จะเห็นว่าข้อความนี้มีตัวบ่งปริมาณ "ทุก ๆ จำนวนเต็ม y " อยู่ท้ายประโยค สามารถแปลงเป็นประโยคสัญลักษณ์ใหม่โดยย้ายไปต่อท้าย "มีจำนวนเต็ม x " ซึ่งทำให้ความหมายไม่เปลี่ยนแปลง แต่ไม่สามารถย้ายไปไว้ต้นประโยคเพราะความหมายอาจเปลี่ยนไปจากเดิม ดังแสดงให้เห็นในตัวอย่าง 2.5.9

การตรวจสอบค่าความจริงประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัวขึ้นไปค่อนข้างซับซ้อนถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตที่มีขนาดใหญ่ จึงขอยกตัวอย่างเอกภพสัมพัทธ์ที่มีสมาชิกไม่มากเพื่อความเข้าใจดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5.9 ให้ $U = \{-1, 0, 1\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาข้อความ $x + y = 0$ โดยสร้างแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้

x	y	$x + y = 0$	ค่าความจริง
-1	-1	$-1 + (-1) = 0$	F
	0	$-1 + 0 = 0$	F
	1	$-1 + 1 = 0$	T
0	-1	$0 + (-1) = 0$	F
	0	$0 + 0 = 0$	T
	1	$0 + 1 = 0$	F
1	-1	$1 + (-1) = 0$	T
	0	$1 + 0 = 0$	F
	1	$1 + 1 = 0$	F

รูปที่ 8 แผนภาพต้นไม้ไม่แสดงว่าค่าความจริงข้อความ $x + y = 0$ เมื่อ $U = \{-1, 0, 1\}$

เมื่อพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ $\forall x \in U \exists y \in U, x + y = 0$ ต้องตรวจสอบว่าแต่ละ x จะมี y ที่ทำให้ $x + y = 0$ หรือไม่ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ถ้า $x = -1$ เลือก $y = 1$ ถ้า $x = 0$ เลือก $y = 0$ และถ้า $x = 1$ เลือก $y = -1$ สอดคล้องเงื่อนไขทั้งหมดทำให้สรุปได้ว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าผู้เขียนสลับอันดับของตัวบ่งปริมาณจะได้ประพจน์ $\exists x \in U \forall y \in U, x + y = 0$ ต้องตรวจสอบว่า มี x ใน U หรือไม่ที่ทำให้ทุก y สอดคล้องเงื่อนไข $x + y = 0$ จากแผนภาพจะเห็นได้ชัดว่า x ทั้ง 3 กรณีไม่สอดคล้องกับ y ทุกตัวทำให้ประพจน์นี้เป็นเท็จ ดังนั้นการเรียงลำดับตัวบ่งปริมาณจึงมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการสื่อความหมายของประพจน์ ถ้าเขียนสลับกันก็จะทำให้ความหมายที่ต้องการสื่อคลาดเคลื่อนไป

ต่อมาจะกล่าวถึงการหาค่าจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เช่น "ไม่มีจำนวนเต็ม x ใดเลยที่สอดคล้อง $x^2 + x + 1 = 0$ " เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\sim \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + x + 1 = 0$$

หมายถึง "ทุกจำนวนเต็ม x จะสอดคล้อง $x^2 + x + 1 \neq 0$ " เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + x + 1 \neq 0$$

สรุปได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.5.10 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของประพจน์ $p(x)$ นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

นิเสธของ $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ คือ $\sim \forall x \in \mathcal{U}, p(x) \equiv \exists x \in \mathcal{U}, \sim p(x)$

นิเสธของ $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ คือ $\sim \exists x \in \mathcal{U}, p(x) \equiv \forall x \in \mathcal{U}, \sim p(x)$

ตัวอย่าง 2.5.11 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x = x + 0$

คำตอบคือ $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq x + 0$

2. $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}, xy > 0 \rightarrow x + y > 0$

ใช้กฎ $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ ช่วยในการหานิเสธ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \sim \forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}, xy > 0 \rightarrow x + y > 0 \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, \sim (xy > 0 \rightarrow x + y > 0) \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, (xy > 0) \wedge \sim (x + y > 0) \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, (xy > 0) \wedge (x + y \leq 0) \end{aligned}$$

คำตอบคือ $\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, (xy > 0) \wedge (x + y \leq 0)$

ตัวอย่าง 2.5.12 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x > 0$ แล้ว $x^2 > 0$

เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์คือ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \rightarrow x^2 > 0$

นิเสธของประพจน์นี้คือ $\exists x \in \mathbb{R}, (x > 0) \wedge (x^2 \leq 0)$

หรือเขียนได้เป็น "มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x > 0$ และ $x^2 \leq 0$ "

2. มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $xy = 1$

เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์คือ $\exists x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}, xy = 1$

นิเสธของประพจน์นี้คือ $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, xy \neq 1$

หรือเขียนได้เป็น "ทุก ๆ จำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $xy \neq 1$ "

เพื่อความกระชับในการเขียนจะใช้ $\exists x, y \in \mathbb{Z}, xy = 1$ แทน $\exists x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}, xy = 1$

และ $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xy \neq 1$ แทน $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, xy \neq 1$

ตัวอย่าง 2.5.13 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x \in \mathcal{U}, p(x) \rightarrow q(x)$ นิเสธคือ $\forall x \in \mathcal{U}, p(x) \wedge \sim q(x)$

2. $\forall x \in \mathcal{U}, p(x) \vee q(x)$ นิเสธคือ $\exists x \in \mathcal{U}, \sim p(x) \wedge \sim q(x)$

3. $\exists x \in \mathcal{U} \forall y \in \mathcal{U}, \sim p(x, y) \rightarrow q(x, y)$ นิเสธคือ $\forall x \in \mathcal{U} \exists y \in \mathcal{U}, \sim p(x, y) \wedge \sim q(x, y)$

4. $\forall x \in \mathcal{U} \forall y \in \mathcal{U}, p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)$ นิเสธคือ $\exists x \in \mathcal{U} \exists y \in \mathcal{U}, \sim p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)$

5. $\exists x \in \mathcal{U}, p(x) \rightarrow \forall x \in \mathcal{U}, q(x)$ นิเสธคือ $\exists x \in \mathcal{U}, p(x) \wedge \exists x \in \mathcal{U}, \sim q(x)$

2.6 การจัดการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์

ในการจัดการเรียนเพื่อทำให้เกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับผู้เรียนในเรื่องการให้เหตุผล ทำให้พัฒนาความคิดอย่างเป็นระบบดังที่กล่าวไว้ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ว่า "การให้เหตุผล เป็นความสามารถในการให้เหตุผล รับฟังและให้เหตุผลสนับสนุน หรือโต้แย้ง เพื่อนำไปสู่การสรุป โดยมีข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์รองรับ" จะเห็นได้ว่าการให้เหตุผลนั้นมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการคิดวิเคราะห์เบื้องต้นเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ อันจะทำให้เข้าใจหลักคิดขั้นสูงต่อไปได้ จึงได้บรรจุในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยเนื้อหาจะเน้นไปที่ความรู้พื้นฐานทางตรรกศาสตร์และการอ้างเหตุผล ในการเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้งสายที่เน้นวิทยาศาสตร์ และไม่เน้นวิทยาศาสตร์ ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
ม.4 ไม่เน้น วิทยาศาสตร์	1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเซตและตรรกศาสตร์เบื้องต้น ในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์	ตรรกศาสตร์เบื้องต้น - ประพจน์และตัวเชื่อม (นิเสธ และ หรือ ถ้า...แล้ว... ก็ต่อเมื่อ)
ม.4 เน้น วิทยาศาสตร์	2. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้น ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และอ้างเหตุผล	ตรรกศาสตร์ - ประพจน์และตัวเชื่อม - ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ - การอ้างเหตุผล

ตารางที่ 21 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางเรื่องตรรกศาสตร์

หมายเหตุ ระดับชั้น ม.4 ไม่เน้นวิทยาศาสตร์ ตัวชี้วัดมีเรื่องเซตมาเกี่ยวข้องจะกล่าวถึงในบทที่ 4

ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องตรรกศาสตร์ ผู้สอนสามารถจัดให้ผู้เรียนได้รู้จักการกำหนดปัญหา และได้ลงมือศึกษา สำรวจ เพื่อเสาะแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง โดยแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E

ตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E

เป็นตัวอย่างการสอนสาระการเรียนรู้ "การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณสองตัว" โดยตรวจสอบค่าความจริงทั้ง 4 รูปแบบคือ $\forall x \forall y, p(x, y)$, $\forall x \exists y, p(x, y)$, $\exists x \forall y, p(x, y)$ และ $\exists x \exists y, p(x, y)$ เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ที่มีสมาชิกไม่มากนัก และใช้ตารางแบบเติมจุดเพื่อช่วยให้เกิดมโนทัศน์ และขยายไปสู่กรณีทั่วไปได้ในที่สุด ซึ่งทำได้ 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นสร้างความสนใจ

นำเข้าสู่บทเรียนโดยทบทวนการตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณเพียงตัวเดียว แล้วตั้งคำถามที่อยู่รอบตัวเช่น นักเรียนทราบหรือไม่ว่าประโยคที่ครูพูดต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1. นักเรียนชายทุกคนมีหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์
2. นักเรียนหญิงและนักเรียนชายทุกคนใส่แว่นตา
3. มีนักเรียนหญิงและนักเรียนชายใส่แว่นตา

ให้นักเรียนแต่ละคนปรึกษากันเพื่อหาวิธีตรวจสอบค่าความจริงของประโยคดังกล่าว ลำดับต่อไปจะนำเสนอกิจกรรมสร้างตารางจุดแสดงค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณโดยมีหลักดังนี้ กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{a, b, c\}$ พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ $p(x, y)$ ถ้าค่าความจริงเป็นจริงใช้ $\bullet$ และค่าความจริงเป็นเท็จใช้ $\circ$ เขียนลงตารางดังนี้

c	$p(a, c)$	$p(b, c)$	$p(c, c)$
b	$p(a, b)$	$p(b, b)$	$p(c, b)$
a	$p(a, a)$	$p(b, a)$	$p(c, a)$
	a	b	c

ตารางที่ 22 ค่าความจริงของประพจน์ $p(x, y)$

เช่น $U = \{-1, 0, 1\}$ และ $p(x, y)$ แทนประพจน์ $x + y = 0$ เขียนตารางได้ดังนี้

-1	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
0	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
1	$\bullet$	$\circ$	$\circ$
	-1	0	1

ตารางที่ 23 ตารางจุดของประพจน์ $x + y = 0$

จะเรียกตารางนี้ว่า ตารางจุด โดยให้แนวนอนเป็นค่า x และแนวตั้งเป็นค่า y ต่อไปจะเตรียมโจทย์โดยกำหนดเอกภพสัมพัทธ์และประพจน์ต่าง ๆ นำบัตรคำถามไปแจกให้นักเรียน เพื่อให้สร้างตารางจุดและคาดเดาค่าความจริงของประพจน์นั้น ๆ ตัวอย่างบัตรคำถาม

$$U = \{1, 2, 3\}$$

$$p(x, y) \text{ แทนประพจน์ } x + y > 2$$

$$\forall x \forall y, p(x, y) \quad \exists x \exists y, p(x, y) \quad \forall x \exists y, p(x, y) \quad \exists x \forall y, p(x, y)$$

2. ขั้นสำรวจค้นหา

ให้นักเรียนจับกลุ่มกลุ่มละ 5 คนตามความสมัครใจ แจกบัตรคำถามเพื่อคาดเดาค่าความจริงทั้ง 4 รูปแบบใช้เวลา 5-10 นาที โดยครูผู้สอนจะคอยให้คำปรึกษาในขณะลงมือทำ

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

ให้แต่ละกลุ่มสรุปคำตอบ และออกมาอภิปรายคำตอบที่ได้ แล้วนักเรียนในชั้นสรุปความคิดรวบยอดของการพิจารณาตารางจุด สรุปได้ดังนี้

	ค่าความจริงเป็นจริง	ค่าความจริงเป็นเท็จ
$\forall x \forall y, p(x, y)$	มีจุดดำทุกจุด	มีจุดขาวอย่างน้อย 1 จุด
$\exists x \exists y, p(x, y)$	มีจุดดำอย่างน้อย 1 จุด	มีจุดขาวทุกจุด
$\forall x \exists y, p(x, y)$	มีอย่างน้อยหนึ่งแถวที่มีจุดดำอยู่ทั้งแถว	ไม่มีแถวที่มีจุดดำทั้งแถวทั้งแถว
$\exists x \forall y, p(x, y)$	มีจุดดำในทุก ๆ แถว	มีบางแถวเป็นจุดขาวทั้งหมด

ตารางที่ 24 สรุปค่าความจริงของประพจน์ $p(x, y)$ โดยใช้ตารางจุด

ครูจะถามเชื่อมโยงไปยังกรณีทั่วไป โดยใช้ตัวอย่างประกอบ

4. ขั้นขยายความรู้

ครูแสดงโจทย์ที่มีเอกภพสัมพัทธ์ที่หลากหลาย และทั่วไปมากขึ้น ให้นักเรียนช่วยกันตอบตามข้อสรุปในขั้นที่ 3

5. ขั้นประเมิน

ให้นักเรียนทำใบงานรายบุคคล

นอกจากวิธีการจัดการเรียนรู้แบบ 5E แล้ว ยังมีวิธีการจัดการเรียนรู้แบบ STAD คือรูปแบบการจัดการเรียนการสอนแบบร่วมมือกันอีกรูปแบบหนึ่ง ที่มีชื่อเต็มว่า Student Teams Achievement Divisions ซึ่งกำหนดให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกัน ทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4-5 คน ซึ่งประกอบด้วยนักเรียนที่เรียนเก่ง 1 คน นักเรียนที่เรียนปานกลาง 2-3 คน และนักเรียนที่เรียนอ่อน 1 คน ผู้อ่านสามารถนำไปปรับใช้ให้เข้ากับบริบทของชั้นเรียนได้ตามความเหมาะสม

สรุป

ในบทที่ 2 ได้กล่าวถึงพื้นฐานทางตรรกศาสตร์ซึ่งจะเป็นความรู้เบื้องต้นในการนำไปใช้ในเขียนพิสูจน์ด้วยวิธีต่าง ๆ ในบทถัดไป โดยเริ่มต้นจากคำว่าประพจน์ คือประโยคที่บอกค่าความจริงได้ว่าจริงหรือเท็จเพียงอย่างเดียวเท่านั้น จากนั้นกล่าวถึงตัวเชื่อมของประพจน์ที่ประกอบไปด้วย

1. นิเสธ
2. หรือ
3. และ
4. ถ้า...แล้ว
5. ก็ต่อเมื่อ

ประพจน์ที่มีตัวเชื่อมเหล่านี้เรียกว่าประพจน์เชิงประกอบ ประพจน์ที่ไม่มีตัวเชื่อมเรียกประพจน์เชิงเดี่ยว ต่อมาพิจารณาประพจน์ที่มีความหมายเดียวกันเรียกว่าประพจน์ที่สมมูลกัน และศึกษาประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุก ๆ กรณีซึ่งเรียกว่าสัจนิรันดร์ รวมทั้งการเรียนรู้กฎต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง ถัดไปกล่าวถึงการอ้างเหตุผลโดยพิจารณารูปแบบการให้เหตุผล พร้อมทั้งวิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผล ถ้าข้อความนั้นสมเหตุสมผลจะกล่าวได้ว่า ผลอนุมานได้จากเหตุต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ข้างต้น และเรียกกระบวนการให้เหตุผลเหล่านี้ว่าการพิสูจน์ ทำได้ 2 แบบคือ การพิสูจน์ตรง ทำได้โดยใช้บทนิยาม 2.4.6 และการพิสูจน์อ้อม โดยอาศัยสัจนิรันดร์ T22 เรียกอีกชื่อว่าการพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง ซึ่งจะนำไปใช้เป็นแนวทางในการเรียนวิธีการพิสูจน์ในบทที่ 3 ต่อไป จากนั้นก็กล่าวถึงตัวบ่งปริมาณทางตรรกศาสตร์ประกอบด้วย 2 ตัวคือ ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด และตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง แล้วศึกษาการแปลงประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ซึ่งเป็นหัวใจความสำคัญในการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ ถัดไปการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียวและมากกว่าหนึ่งตัว ถ้าเอกภพสัมพัทธ์มีสมาชิกไม่มากนักสามารถตรวจได้โดยง่ายโดยใช้แผนภาพต้นไม้หรือแจกแจงกรณีโดยใช้ตาราง ความสมมูลของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณอาศัยความรู้เกี่ยวกับสมมูลของประพจน์ที่ไม่มีตัวบ่งปริมาณมาช่วยในการพิจารณา โดยมีข้อควรระวังคือ เมื่อมีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัวขึ้นไปที่แตกต่างกัน การสลับลำดับตัวบ่งปริมาณจะมีความหมายไม่เหมือนเดิม และการหานิเสธของตัวบ่งปริมาณ นิเสธของตัวบ่งปริมาณทั้งหมดจะเป็นตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง และนิเสธของตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่งเป็นตัวบ่งปริมาณทั้งหมด สุดท้ายจะกล่าวถึงตัวอย่างแนวทางการจัดเรียนการสอนเรื่องตรรกศาสตร์โดยใช้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท. 2546) ทำให้เห็นการนำความรู้เรื่องตรรกศาสตร์ไปใช้สอนในระดับมัธยม

คำถามท้ายบท

1. พิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็น ประพจน์ หรือ ประโยคเปิด หรือไม่เป็นทั้งสองอย่าง
 - 1.1 ห้ามเดินลัดสนาม
 - 1.2 ปีปัจจุบันเป็นปีระกา
 - 1.3 น่านเป็นจังหวัดในภาคใต้
 - 1.4 มีจำนวนนับที่น้อยกว่า 1
 - 1.5 ใครเป็นคนนัดพวกเราที่สยามพารากอน
 - 1.6 รถไฟมีสองหัว
2. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
 - 2.1 ถ้า $2^0 = 0^2$ แล้ว $2 = 0$
 - 2.2 ปูม้าไม่มีขาที่ต่อเมื่อลิงไม่มีหู
 - 2.3 จำนวนนับเป็นจำนวนเต็มหรือตรรกยะ
 - 2.4 ถ้า $2 \neq 9$ แล้ว นกขมิ้นบินไม่ได้
 - 2.5 ถ้าช้างเป็นสัตว์ปีกแล้วช้างเป็นตั๊กแตน
 - 2.6 กระต่ายไม่มีฟัน ก็ต่อเมื่อ $1 > 2$
3. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
 - 3.1 $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow p)$
 - 3.2 $p \wedge (\sim q \rightarrow r) \leftrightarrow (r \vee q)$
 - 3.3 $\sim [\sim p \wedge (q \rightarrow \sim r)] \rightarrow (p \wedge \sim r)$
 - 3.4 $\sim p \wedge (q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow r \wedge s)$
4. ประพจน์ p, q, r, s มีค่าความจริงเป็น T, F, F, T ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
 - 4.1 $p \rightarrow (q \vee \sim (p \wedge r))$
 - 4.2 $\sim [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r)] \rightarrow \sim s$
 - 4.3 $\sim (r \wedge \sim s) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
 - 4.4 $[(\sim p \vee (\sim p \rightarrow (q \wedge r) \vee s) \rightarrow p) \wedge r] \leftrightarrow p$
5. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง
 - 5.1 q และ $\sim p \vee (p \wedge q)$
 - 5.2 $\sim p \rightarrow q$ และ $\sim q \rightarrow p$
 - 5.3 $(p \vee r) \rightarrow q$ และ $p \rightarrow (q \vee r)$
 - 5.4 $p \leftrightarrow (q \vee r)$ และ $(p \vee r) \leftrightarrow q$
6. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด ๆ จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ ถ้าสมมูลกันจงแสดงโดยใช้ทฤษฎีบท ถ้าไม่สมมูลจงยกตัวอย่างค้าน
 - 6.1 $\sim (p \rightarrow \sim q)$ และ $p \wedge (p \rightarrow q)$
 - 6.2 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$
 - 6.3 $p \wedge (q \vee r)$ และ $(p \wedge q) \vee r$
 - 6.4 $p \leftrightarrow \sim q$ และ $\sim p \leftrightarrow q$
 - 6.5 $p \rightarrow (q \vee r)$ และ $\sim (\sim r \rightarrow q) \rightarrow \sim p$
 - 6.6 $\sim (p \wedge \sim q)$ และ $\sim q \rightarrow \sim p$
 - 6.7 $\sim p \rightarrow q$ และ $(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim p)$
 - 6.8 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
7. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้
 - 7.1 รองเท้าเป็นเครื่องแต่งกายชนิดหนึ่ง
 - 7.2 ถ้าแดงไปโรงเรียน แล้วดำจะไม่ทำการบ้าน

7.3 $2 > 4$ และ $3 = 5$

7.4 $x + 1 = 3$ หรือ π เป็นจำนวนตรรกยะ

7.5 ถ้า 2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 1 เป็นจำนวนเฉพาะ

7.6 5 เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ e เป็นจำนวนตรรกยะ

7.7 $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$

7.8 ถ้า $xy > 0$ แล้ว $(x > 0$ และ $y > 0)$ หรือ $(x < 0$ และ $y < 0)$

7.9 $x + y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = -y$ หรือ $y = -x$

7.10 ถ้า 2 หาร x ลงตัว หรือ 3 หาร x ลงตัว แล้ว 6 หาร x ลงตัว

8. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

8.1 $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$

8.4 $\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim p \wedge \sim q$

8.2 $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

8.5 $(\sim p \rightarrow \sim q) \vee (p \leftrightarrow q)$

8.3 $\sim p \rightarrow (p \vee q)$

8.6 $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$

9. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีบท

9.1 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)$

9.6 $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

9.2 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

9.7 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

9.3 $\sim (p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

9.8 $[\sim p \vee (r \rightarrow s)] \leftrightarrow [(r \vee s) \rightarrow p]$

9.4 $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

9.9 $[p \rightarrow (r \rightarrow s)] \leftrightarrow [(\sim r \wedge s) \rightarrow p]$

9.5 $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)$

9.10 $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)]$

10. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้วิธีขัดแย้ง

10.1 $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim q$

10.7 $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

10.2 $[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow p$

10.8 $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

10.3 $\sim p \wedge q \rightarrow p$

10.9 $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \leftrightarrow q)$

10.4 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

10.10 $\sim [p \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

10.5 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$

10.11 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

10.6 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

10.12 $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)]$

11. จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

11.1 $\sim p \vee q, \sim p \rightarrow q \vdash q$

11.3 $\sim p \rightarrow q, q \rightarrow p \vdash \sim q$

11.2 $p \wedge \sim q, q \rightarrow \sim r, r \wedge p \vdash q \rightarrow p$

11.4 $p \rightarrow (p \rightarrow r), \sim q \rightarrow \sim p, p \vdash r$

12. จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้วิธีขัดแย้ง

12.1 เหตุ 1. $\sim p$
2. $\sim (p \wedge q) \rightarrow r$
ผล r

12.2 เหตุ 1. $q \rightarrow (r \vee \sim s)$
2. s
3. $s \rightarrow q$
ผล $r \wedge s$

12.3 เหตุ 1. $\sim t \rightarrow \sim r$
2. $\sim s$
3. $t \rightarrow w$
4. $r \vee s$
ผล w

12.4 เหตุ 1. ถ้าฝนตกแล้วน้ำจะท่วม
2. น้ำท่วม
ผล ฝนตก

12.5 เหตุ 1. $\sim (p \rightarrow q)$
2. $\sim q \rightarrow r$
ผล $r \wedge p$

12.6 เหตุ 1. $p \rightarrow (\sim q \vee r)$
2. $q \rightarrow p$
3. $\sim p$
ผล r

12.7 เหตุ 1. $p \rightarrow (q \wedge r)$
2. $q \rightarrow \sim r$
3. $p \rightarrow r$
4. q
ผล $\sim p$

12.8 เหตุ 1. ถ้าฝนตกแล้วน้ำจะท่วม
2. ฝนตก
ผล น้ำท่วม

13. จงพิสูจน์การอ้างเหตุผลต่อไปนี้

13.1 $p, \sim q \vee \sim p, \sim q \rightarrow (r \vee \sim s) \vdash s \rightarrow r$

13.2 $s \rightarrow t, p \rightarrow (q \rightarrow r), (s \wedge \sim t) \vee p \vdash r \vee \sim q$

14. จงพิสูจน์การอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลโดยใช้วิธีการพิสูจน์อ้อม (indirect proof)

14.1 $p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow r, p \vdash r$

14.2 $p, \sim q \rightarrow \sim p, q \rightarrow (r \vee s) \vdash \sim r \rightarrow s$

15. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

15.1 มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $|x| = x$

15.2 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามจะได้ $x^2 > 0$

15.3 จำนวนนับทุกจำนวนมีค่ามากกว่า 1

15.4 ไม่มีจำนวนตรรกยะใดเลยที่เป็นจำนวนบวก

15.5 มีจำนวนจริง x และ y ซึ่ง $x + y > 0$

15.6 มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m > n$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n

16. ให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $C = \{1, 2, 3, 4\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

16.1 $\forall x \in A [x + 1 \geq x]$

16.4 $\forall x \in A \forall y \in A [x \neq y \rightarrow x > y]$

16.2 $\exists x \in C [x(x + 1) = x]$

16.5 $\forall x \in B \exists y \in B [xy = 1]$

16.3 $\forall x \in B [x > 0 \rightarrow x^2 > x]$

16.6 $\exists x \in C \exists y \in C [x + y < xy]$

17. ให้เอกพจน์สัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหาเงื่อนไขของข้อความต่อไปนี้

17.1 $\forall x [\sqrt{x} \geq 0]$

17.4 $\forall x \forall y [xy > 0 \rightarrow \frac{x}{y} > 0]$

17.2 $\forall x [x = 1 \rightarrow |x| > 2]$

17.5 $\exists x \forall y [x = y \leftrightarrow x^2 = y^2]$

17.3 $\exists x [(x < 3) \wedge (x > 3)]$

17.6 $\exists x \exists y [(xy = 10 \wedge x > 5) \rightarrow y > 2]$

18. ให้เอกพจน์สัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหาเงื่อนไขของข้อความต่อไปนี้

18.1 ไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่มากกว่าศูนย์

18.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x + y = y$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง y

18.3 ทุก ๆ จำนวนเต็ม m, n ถ้า $m + n = mn$ แล้ว $n^m = 1$

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- ชวลิต บุรพาศิริวัฒน์. (2538). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏจันทรเกษม.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พัศตร์มกา ศรีสว่าง, ประสิทธิ์ ทองแจ่ม และ สุรพล เนาวรัตน์. (2558). **ผลการใช้กระบวนการจัดการเรียนรู้แบบ 5E วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเซต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม ปีที่ 9 ฉบับพิเศษ เมษายน พ.ศ. 2558.
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธนภัตย์ ปัทมโกมล, ปรีชา เนาว์เย็นผล และ อุษาวดี จันทรสนธิ. (2556). **ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยการใช้วิธีสอนแบบ 5E ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 4 โรงเรียนมารีย์วิทยา จังหวัดนครราชสีมา**. วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ปีที่ 15 ฉบับที่ กรกฎาคม – กันยายน พ.ศ. 2556. มหาวิทยาลัยนเรศวร.
- ภัทรา เตชาภิวาทย์. (2540). **คณิตตรรกศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
- อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อนุกรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **ตรรกศาสตร์และระบบจำนวนจริง**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์.
- Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข
2. การพิสูจน์ข้อความแบบแจกแจงกรณี
3. การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้
4. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง
5. การพิสูจน์ข้อความที่เป็นไปได้เพียงอย่างเดียว
6. การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถเขียนบทพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข
2. สามารถเขียนบทพิสูจน์โดยวิธีแจกแจงกรณี
3. สามารถเขียนบทพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้
4. สามารถเขียนบทพิสูจน์ข้อความโดยวิธีขัดแย้ง
5. สามารถเขียนบทพิสูจน์ข้อความที่เป็นไปได้เพียงอย่างเดียว
6. สามารถเขียนบทพิสูจน์ข้อความโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
- 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
- 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
- 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย
- 2.4 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
- 2.5 มอบหมายให้ทำ assignment เพื่อส่งท้ายคาบ

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "ตรรกศาสตร์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "ตรรกศาสตร์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 3

ระเบียบวิธีการพิสูจน์

ในทางคณิตศาสตร์นั้นจะสร้างโลกของตัวเองขึ้นมาโดยสมมติสิ่งที่เรียกว่า "อนิยาม" ขึ้นมาจากนั้นให้คำจำกัดความของสิ่งเหล่านั้นเรียกว่า "นิยาม" และเพิ่มเติมด้วยข้อความจำนวนหนึ่งซึ่งถือว่าเป็นจริงในโลกโดยไม่ต้องพิสูจน์เรียกว่า "สัจพจน์" และใช้เครื่องมือต่าง ๆ เหล่านี้เพื่อ คาดการณ์ข้อความที่คิดว่าจะเป็นจริงภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดเรียกว่า "ข้อความคาดการณ์" การตรวจสอบว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริงหรือไม่ ต้องใช้วิธีการพิสูจน์ที่ยอมรับตามหลักตรรกศาสตร์ ขั้นตอนสำคัญในการค้นพบความจริงเหล่านั้นคือการ "พิสูจน์" หรือ "อ้างเหตุผล" เมื่อได้รับการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์จะเปลี่ยนเป็น "ทฤษฎี" ในที่สุด การพิสูจน์จึงเป็นเรื่องจำเป็นและสำคัญยิ่งสำหรับคณิตศาสตร์ เพราะเป็นสิ่งที่ทำให้เรายืนยันความเป็นจริงต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ได้ ข้อความที่เราสงสัยว่าเป็นจริงหรือไม่ เมื่อได้รับการพิสูจน์แล้วเราจะสามารถยอมรับในความจริงของข้อความนั้นตลอดไป เพราะเราใช้กระบวนการคิดที่อาศัยหลักตรรกศาสตร์ซึ่งมีความแน่นอนชัดเจน ไม่แปรผันไปตามกาลเวลาหรือสภาพแวดล้อม (พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. 2560. คำนำ)

การพิสูจน์ในหนังสือหรือตำราแต่ละเล่มอาจใช้ชื่อวิธีหรือจำนวนวิธีแตกต่างกันขึ้นอยู่กับผู้เขียน สำหรับตำราเล่มนี้ผู้เขียนจะมีการนำเสนอวิธีการพิสูจน์ไว้ทั้งหมด 6 วิธี ประกอบไปด้วย

1. การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข
2. การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี
3. การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้
4. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง
5. การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้เพียงเดียว
6. การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3.1 การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปแบบ $p \rightarrow q$ เรียกว่า การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข (Proof of conditional statements) ต้องการแสดงว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง เนื่องจาก $p \rightarrow q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ ดังนั้นต้องแสดงให้เห็นว่าไม่เกิดกรณิดังกล่าว นั่นคือเมื่อไรก็ตามที่ p เป็นจริง ต้องแสดงให้เห็นว่า q เป็นจริงด้วย เขียนเป็นโครงการพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ p เป็นจริง
 $\vdots$
ดังนั้น q เป็นจริง (ข้อสรุป) $\square$

จะเรียกวิธีนี้ว่าการพิสูจน์แบบตรง (Direct proof) นิยมใช้เครื่องหมาย $\square$ วางไว้บรรทัดสุดท้ายเพื่อบอกว่าจบการพิสูจน์ ในส่วนที่เว้นว่างไว้นั้นคือส่วนที่จะเติมรายละเอียดให้สมบูรณ์อาจจะได้จากนิยาม ทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาก่อนหน้า หรือสัญพจน์ เพื่อให้นำไปสู่ข้อสรุปอย่างเป็นเหตุเป็นผลกัน เพื่อใช้ในการพิสูจน์ในตัวอย่างต่อไปจากนี้ จะนิยาม

บทนิยาม 3.1.1 เรียกจำนวนเต็ม a ที่ไม่ใช่ศูนย์ว่าหารจำนวนเต็ม b ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \mid b$

ถ้ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $b = ak$

และเรียก a ว่าตัวหาร (Divisor) หรือตัวประกอบ (Factor) ของ b ถ้า a หาร b ไม่ลงตัวเขียนแทนด้วย $a \nmid b$

บทนิยาม 3.1.2 จำนวนคู่ (Even number) คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว หรือกล่าวได้ว่า

ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $2 \mid a$ หรือมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$

และจำนวนเต็ม a ที่มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k + 1$ เรียกว่า **จำนวนคี่ (Odd number)**

ตัวอย่าง 3.1.3 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่ "

แนวคิด ข้อความดังกล่าวมีความหมายว่า "ทุก ๆ จำนวนเต็ม n ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ เป็นจำนวนคู่} \rightarrow n^2 \text{ เป็นจำนวนคู่}$

ต้องพิสูจน์ข้อความดังกล่าวเป็นจริงไม่ว่าจำนวนเต็ม n ใด ๆ เริ่มเขียนบรรทัดแรกด้วย "ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ" และมีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ n เป็นจำนวนคู่
 $\vdots$
ดังนั้น n^2 เป็นจำนวนคู่ $\square$

เขียนบทพิสูจน์ให้สมบูรณ์ได้ดังนี้

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติว่า n เป็นจำนวนคู่ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$ แล้วจะได้ว่า

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

ให้ $p = 2k^2$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $n^2 = 2p$ โดยบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคู่ $\square$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $m + n$ เป็นจำนวนคู่ "

แนวคิด เขียนข้อความในรูปสัญลักษณ์คือ $\forall n, m \in \mathbb{Z}, n \text{ และ } m \text{ เป็นจำนวนคู่} \rightarrow n+m \text{ เป็นจำนวนคู่}$

บทพิสูจน์. ให้ n และ m เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติว่า n และ m เป็นจำนวนคู่ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ p ซึ่ง $n = 2k$ และ $m = 2p$ แล้ว

$$n + m = 2k + 2p = 2(k + p)$$

ให้ $c = k + p$ เนื่องจาก k, p เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น c เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือมีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $n + m = 2c$

จากบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า $n + m$ เป็นจำนวนคู่ $\square$

ประโยคที่ว่า "โดยบทนิยาม" ในการเขียนพิสูจน์จะละไว้ โดยผู้อ่านต้องเข้าใจได้ว่ามาจากบทนิยามของคำ ๆ นั้น และไม่เขียนประโยคสัญลักษณ์ของประพจน์ที่ต้องการพิสูจน์ เพื่อความสวยงามและกระชับมากขึ้นในการเขียนบทพิสูจน์ (ทำได้เมื่อผู้เขียนเข้าใจหลักการอย่างถูกต้องแล้ว)

ตัวอย่าง 3.1.5 จงพิสูจน์ว่า "สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ซึ่ง $a \neq 0$ ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (2b + 3c)$ "

บทพิสูจน์. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \neq 0$ สมมติว่า $a \mid b$ และ $a \mid c$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ p ซึ่ง $b = ka$ และ $c = pa$ แล้ว

$$2b + 3c = 2(ka) + 3(pa) = a(2k + 3p)$$

ให้ $x = 2k + 3p$ เนื่องจาก k, p เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือมีจำนวนเต็ม x ซึ่งทำให้ $2b + 3c = ax$ สรุปได้ว่า $a \mid (2b + 3c)$ $\square$

ตัวอย่าง 3.1.6 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่"

แนวคิด มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ n^2 เป็นจำนวนคู่

:

ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่ $\square$

ต่อมาเติมส่วนต่าง ๆ ได้ดังนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติว่า n^2 เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n^2 = 2k$

⋮

มีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $n = 2p$ ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่

จากช่องว่างที่เว้นไว้คือส่วนที่ต้องเติมให้ครบโดยจากข้อความที่ $n^2 = 2k$ พยายามหา p ที่ทำให้ได้ $n = 2p$ ซึ่งโดยปกติผู้อ่านคงนึกถึง n ในรูปแบบ $n = \sqrt{2k}$ แต่จำนวน n ที่ได้ อาจจะไม่เป็นจำนวนเต็มและเชื่อมโยงไปหา p ไม่ได้ ดังนั้นการพิสูจน์แบบตรงนี้ทำไม่ได้ แต่ทำได้โดยใช้กฎแย้งสลับที่ซึ่งมีความหมายเดียวกับข้อความที่ต้องการจะพิสูจน์คือ $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ ดังนั้นจะทำการพิสูจน์

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ เป็นจำนวนคี่} \rightarrow n^2 \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติว่า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$ แล้ว

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ให้ $p = 2k^2 + 2k$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $n^2 = 2p + 1$ สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่ □

การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ในตัวอย่าง 3.1.6 เรียกว่า **การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่** (Contrapositive proof) มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\sim q$ เป็นจริง

⋮

ดังนั้น $\sim p$ เป็นจริง □

หนึ่งในกรณีที่พยายามใช้ทั้ง 2 วิธีแล้วแต่ยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ยังมีอีกหนึ่งวิธีคือ **การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง** (Proof by contradiction) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 3.4 ดังนั้นสรุปการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \rightarrow q$ ได้ 3 วิธีคือ

1. การพิสูจน์แบบตรง
2. การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่
3. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง

การพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow (q \vee r)$ เนื่องจาก $p \rightarrow (q \vee r) \equiv p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$ ดังนั้น

สมมติ p และ $\sim q$ เป็นจริง

⋮

ดังนั้น r เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.7 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า $m + n$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่ หรือ n เป็นจำนวนคี่ "

แนวคิด เขียนข้อความในรูปสัญลักษณ์คือ

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, m + n \text{ เป็นจำนวนคี่} \rightarrow (m \text{ เป็นจำนวนคี่} \vee n \text{ เป็นจำนวนคี่})$$

บทพิสูจน์. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $n + m$ เป็นจำนวนคี่ และ m ไม่เป็นจำนวนคี่ (จำนวนคู่) โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ p ซึ่ง $n + m = 2k + 1$ และ $m = 2p$ แล้ว

$$m + n = 2k + 1$$

$$2p + n = 2k + 1$$

$$n = 2k - 2p + 1 = 2(k - p) + 1$$

ให้ $d = k - p$ เนื่องจาก k และ p เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น d เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งทำให้ $n = 2d + 1$ สรุปได้ว่า n เป็นจำนวนคี่ □

การพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow (q \wedge r)$ เนื่องจาก $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ ดังนั้น ต้องพิสูจน์ว่า ทั้ง 2 ข้อความเป็นจริง

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. p \rightarrow r$$

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	q	เป็นจริง

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	r	เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.8 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4 \mid a^2$ และ $a^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่ "

แนวคิด เขียนข้อความในรูปสัญลักษณ์คือ $\forall a \in \mathbb{Z}, a \text{ เป็นจำนวนคู่} \rightarrow (4 \mid a^2 \wedge a^2 + 1 \text{ เป็นจำนวนคี่})$

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติว่า a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$ แล้ว

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ให้ $p = k^2$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งทำให้ $a^2 = 4p$ สรุปได้ว่า $4 \mid a^2$ และ

$$a^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 = 2(2k^2) + 1$$

ให้ $d = 2k^2$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น d เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งทำให้ $a^2 + 1 = 2d + 1$ สรุปได้ว่า $a^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่ □

ตัวอย่าง 3.1.9 ข้อความ "ถ้า $m + n$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m และ n เป็นจำนวนคู่" เป็นจริงหรือเท็จ

วิธีทำ เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\forall n, m \in \mathbb{Z}, m + n \text{ เป็นจำนวนคู่} \rightarrow n \text{ และ } m \text{ เป็นจำนวนคู่}$

ถ้าเลือก $m = 1$ และ $n = 1$ จะเห็นว่า $m + n = 1 + 1 = 2$ เป็นจำนวนคู่ นั่นคือเหตุเป็นจริงแต่ผลเป็นเท็จ เพราะ m และ n เป็นจำนวนคี่ ทำให้สรุปได้ว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ จะเรียกตัวอย่าง $m = 1$ และ $n = 1$ ว่า **ตัวอย่างค้าน (Counterexample)**

ในการพิสูจน์ประพจน์ p เป็นเท็จ อาจทำได้โดยการพิสูจน์ว่า $\sim p$ เป็นจริง เช่นในตัวอย่าง 3.1.9 นิเสธของประพจน์นั้นคือ

$$\exists n, m \in \mathbb{Z}, m + n \text{ เป็นจำนวนคู่} \wedge (n \text{ หรือ } m \text{ เป็นจำนวนคี่})$$

ประพจน์นี้เป็นจริงโดยการเลือก $m = 1$ และ $n = 1$ นั้นเอง

3.2 การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี

จะกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $(p \vee q) \rightarrow r$ เนื่องจาก $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ ดังนั้นต้องพิสูจน์ทั้ง 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $p \rightarrow r$

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	r	เป็นจริง

กรณีที่ 2 $q \rightarrow r$

สมมติ	q	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	r	เป็นจริง □

เรียกว่า**การพิสูจน์โดยแจกแจงกรณี (Proof by cases)** ดังจะยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.1 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่"

แนวคิด เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\forall a \in \mathbb{Z}, (a \text{ เป็นจำนวนคู่} \vee a \text{ เป็นจำนวนคี่}) \rightarrow a^2 + a \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

กรณีที่ 1 สมมติ a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$ แล้ว

$$a^2 + a = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2k^2 + k$ เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 สมมติ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $a = 2c + 1$ แล้ว

$$a^2 + a = (2c + 1)^2 + (2c + 1) = 4c^2 + 4c + 1 + 2c + 1 = 2(2c^2 + 3c + 1)$$

เนื่องจาก c เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2c^2 + 3c + 1$ เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่ □

จากตัวอย่าง 3.2.1 ข้อความที่ว่า " a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่" โดยบทนิยาม 3.1.2 หมายถึง a เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือข้อความที่จะพิสูจน์อาจเขียนใหม่ได้หลายรูปแบบเช่น

1. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่
2. ทุก ๆ a ที่เป็นจำนวนเต็ม $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่
3. $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้า a จำนวนเต็ม สามารถแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือกรณีที่ 1 เมื่อ a เป็นจำนวนคู่ และกรณีที่ 2 เมื่อ a เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่าง 3.2.2 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^2 + 3n + 4$ เป็นจำนวนคู่"

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 1 สมมติ n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$ แล้ว

$$n^2 + 3n + 4 = (2k)^2 + 3(2k) + 4 = 2(2k^2 + 3k + 2)$$

เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2k^2 + 3k + 2$ เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า $n^2 + 3n + 4$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 สมมติ n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $n = 2c + 1$ แล้ว

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 4 &= (2c + 1)^2 + 3(2c + 1) + 4 \\ &= 4c^2 + 4c + 1 + 6c + 3 + 4 \\ &= 4c^2 + 10c + 8 \\ &= 2(2c^2 + 5c + 4) \end{aligned}$$

เนื่องจาก c เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2c^2 + 5c + 4$ เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า $n^2 + 3n + 4$ เป็นจำนวนคู่ □

จากตัวอย่าง 3.2.2 ลองมาวิเคราะห์กันว่า "จะรู้ได้อย่างไรว่าจะต้องพิสูจน์โดยแบ่งกรณี" เริ่มด้วยการวิธีพิสูจน์โดยตรงก่อน สมมติว่า n เป็นจำนวนเต็ม แล้วพยายามหาข้อสรุปให้ได้ว่า $n^2 + 3n + 4$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่งข้อสรุปต้องเขียนในรูป $2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มไม่สามารถเชื่อมโยงไปหาผลได้ ทำให้จำเป็นต้องเลือกวิธีแบ่งจำนวนเต็ม n ออกเป็นกรณี เนื่องจากข้อสรุปกล่าวถึงจำนวนคู่จึงต้องแบ่งเป็น 2 กรณีคือ n เป็นจำนวนคู่และจำนวนคี่นั่นเอง

สำหรับจำนวนเต็มแล้วไม่จำเป็นต้องแบ่งเป็น 2 กรณีคือจำนวนคู่และจำนวนคี่ บางครั้งอาจจะแบ่งมากกว่า 2 กรณี เช่นกรณีจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และจำนวนเต็มศูนย์ แบ่งเป็น 3 กรณี หรือจะแบ่งเป็นหลาย ๆ กรณีขึ้นอยู่กับข้อความที่ต้องการพิสูจน์โดยมีหลักว่าต้องพิจารณาให้ครบทุกกรณี ในกรณีอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ย่อมสามารถพิจารณาโดยใช้หลักเดียวกัน

สำหรับกรณีทั่วไป $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow r$ ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง n กรณีเป็นจริง ตามโครงการพิสูจน์นี้

กรณีที่ 1 $p_1 \rightarrow r$

กรณีที่ 2 $p_2 \rightarrow r$

:

กรณีที่ n $p_n \rightarrow r$

ต่อไปจะกล่าวถึงการแบ่งจำนวนเต็มออกเป็นหลาย ๆ กรณี โดยใช้ขั้นตอนการหาร

ทฤษฎีบท 3.2.3 ขั้นตอนการหาร (Division Algorithm)

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียว ที่ทำให้

$$b = aq + r \quad \text{โดยที่} \quad 0 \leq r < |a|$$

เรียก a ว่าตัวส่วน (Denominator) b ว่าตัวเศษ (Numerator) q ว่าผลหาร (Quotient) และ r ว่าเศษเหลือ (Remainder)

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ได้ในวิชาทฤษฎีจำนวน ขั้นตอนการหารจะช่วยให้การแบ่งจำนวนเต็มออกเป็นกรณีต่าง ๆ ได้หลายแบบ เช่น

1. จำนวนเต็ม a ถูกแบ่งโดยการหารด้วย 2 ได้ 2 กรณีคือ $a = 2k$ และ $a = 2k + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k (หรือกรณี a เป็นจำนวนคู่ และ a เป็นจำนวนคี่)
2. จำนวนเต็ม a ถูกแบ่งโดยการหารด้วย 3 ได้ 3 กรณีคือ $a = 3k$ และ $a = 3k + 1$ และ $a = 3k + 2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

ตัวอย่าง 3.2.4 จงแสดงว่า $3 \mid a(a^2 + 2)$ ไม่ว่า a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ก็ตาม

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $k \in \mathbb{Z}$

กรณีที่ 1 $a = 3k$ แล้ว

$$a(a^2 + 2) = 3k((3k)^2 + 2) = 3k(9k^2 + 2) = 3(9k^3 + 2k)$$

ให้ $p = 9k^3 + 2k$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a(a^2 + 2) = 3p$ สรุปได้ว่า $3 \mid a(a^2 + 2)$

กรณีที่ 2 $a = 3k + 1$ แล้ว

$$\begin{aligned} a(a^2 + 2) &= (3k + 1)((3k + 1)^2 + 2) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 2) \\ &= (3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) = 3[(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)] \end{aligned}$$

ให้ $p = (3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a(a^2 + 2) = 3p$ สรุปได้ว่า $3 \mid a(a^2 + 2)$

กรณีที่ 3 $a = 3k + 2$ แล้ว

$$\begin{aligned} a(a^2 + 2) &= (3k + 2)((3k + 2)^2 + 2) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 2) \\ &= (3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 3[(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)] \end{aligned}$$

ให้ $p = (3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a(a^2 + 2) = 3p$ สรุปได้ว่า $3 \mid a(a^2 + 2)$ $\square$

3.3 การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้

ในหัวข้อ 3.1 ได้พิสูจน์ว่า "ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่" ในตัวอย่าง 3.1.3 เมื่อมีเหตุ n เป็นจำนวนคู่ จะนำไปสู่ข้อสรุป n^2 เป็นจำนวนคู่ เมื่อตั้งคำถามต่อไปว่าในทางกลับกัน ข้อความนี้จะเป็นจริงหรือไม่ นั่นคือต้องพิสูจน์ว่า "ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่" ซึ่งได้พิสูจน์ไว้แล้วในตัวอย่าง 3.1.6 ทำให้ได้ว่าผลสามารถสรุปเหตุได้ด้วย อันหมายถึงการพิสูจน์ว่า

" n เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ n^2 เป็นจำนวนคู่"

นั่นคือการพิสูจน์ในรูปแบบ $p \leftrightarrow q$ ซึ่งทำ 2 ขั้นตอนดังนี้

1. $p \rightarrow q$ เรียกว่าขั้น sufficient part (p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ q)
2. $q \rightarrow p$ เรียกว่าขั้น necessarily part (p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ q)

เหตุผลที่ต้องพิสูจน์ทั้ง 2 ขั้นตอนเพราะว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ และเรียกว่า **การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้** (Proof of biconditional statements)

ตัวอย่าง 3.3.1 จงพิสูจน์ว่า "จำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a + 3$ เป็นจำนวนคู่"

แนวคิด เขียนโครงการพิสูจน์ได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้น sufficient part

สมมติ a เป็นจำนวนคี่
 $\vdots$
 ดังนั้น $a + 3$ เป็นจำนวนคู่

ขั้นตอนที่ 2 ขั้น necessarily part

สมมติ $a + 3$ เป็นจำนวนคู่
 $\vdots$
 ดังนั้น a เป็นจำนวนคี่ $\square$

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

ขั้นตอนที่ 1 สมมติ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k + 1$ แล้ว

$$a + 3 = (2k + 1) + 3 = 2(k + 2)$$

เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $k + 2$ เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า $a + 3$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ขั้นตอนที่ 2 สมมติ $a + 3$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a + 3 = 2m$ แล้ว

$$a = 2m - 3 = 2(m - 2) + 1$$

เนื่องจาก m เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $m - 2$ เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า a เป็นจำนวนคี่ $\square$

ตัวอย่าง 3.3.2 จงพิสูจน์ว่า

"สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ ab เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a และ b เป็นจำนวนคี่"

แนวคิด เริ่มต้นด้วยการเขียนโครงการพิสูจน์ได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้น sufficient part

สมมติ ab เป็นจำนวนคี่
 $\vdots$
 ดังนั้น a และ b เป็นจำนวนคี่

จากการวิเคราะห์จะเห็นว่าการพิสูจน์โดยตรงทำไม่ได้ จึงต้องพิสูจน์โดยวิธีการแย่งสลับที่ นั่นคือ

สมมติ a หรือ b เป็นจำนวนคู่
 $\vdots$
 ดังนั้น ab เป็นจำนวนคู่

จะเข้ารูปแบบ $(p \vee q) \rightarrow r$ นั่นคือการพิสูจน์โดยแบ่งกรณีประกอบไปด้วยกรณีที่ 1 คือ $p \rightarrow r$ และกรณีที่ 2 คือ $q \rightarrow r$

ขั้นตอนที่ 2 ขั้น necessarily part

สมมติ a และ b เป็นจำนวนคี่
 $\vdots$
 ดังนั้น ab เป็นจำนวนคี่ $\square$

บทพิสูจน์. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

ขั้นตอนที่ 1

กรณีที่ 1 สมมติ a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$ แล้ว

$$ab = 2kb = 2(kb)$$

เนื่องจาก k และ b เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น kb เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า ab เป็นจำนวนเต็มคู่

กรณีที่ 2 สมมติ b เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม p ซึ่ง $b = 2p$ แล้ว

$$ab = a(2p) = 2(ap)$$

เนื่องจาก a และ p เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น ap เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า ab เป็นจำนวนเต็มคู่

ขั้นตอนที่ 2 สมมติว่า a และ b เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม m และ n ซึ่ง $a = 2m+1$ และ $b = 2n+1$ แล้ว

$$\begin{aligned} ab &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก m และ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2mn + m + n$ เป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า ab เป็นจำนวนคี่ $\square$

บางครั้งการพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ สามารถสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจากข้อความ p ไปยังข้อความ q

$$\begin{array}{ccc}
 p \leftrightarrow q_1 & \text{เขียนแทนด้วย} & p \leftrightarrow q_1 \\
 q_1 \leftrightarrow q_2 & & \leftrightarrow q_2 \\
 q_2 \leftrightarrow q_3 & & \leftrightarrow q_3 \\
 \vdots & & \vdots \\
 q_n \leftrightarrow q & & \leftrightarrow q
 \end{array}$$

เรียกวิธีการพิสูจน์นี้ว่า **iff-string**

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการพิสูจน์โดย iff-string ในเรื่องการดำเนินการของเซตโดยอาศัย บทนิยาม 4.1.12 (ดูในบทที่ 4)

ตัวอย่าง 3.3.3 สำหรับเซต A และ B ในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า $A \cap B = B \cap A$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
 x \in A \cap B &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\
 &\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \\
 &\leftrightarrow x \in B \cap A
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A \cap B = B \cap A$ □

ตัวอย่าง 3.3.4 สำหรับเซต A และ B ในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า $A - B = A \cap B^c$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
 x \in A - B &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \\
 &\leftrightarrow x \in A \cap B^c
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A - B = A \cap B^c$ □

ต่อไปจะกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกันเป็นคู่ เช่น

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge (p_3 \leftrightarrow p_1)$$

สามารถพิสูจน์ได้จาก

$$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)$$

ตัวอย่าง 3.3.5 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

$p_1 : a$ เป็นจำนวนคู่

$p_2 : a^2$ หารด้วย 4 ลงตัว

$p_3 : a^2$ เป็นจำนวนคู่

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

$(p_1 \rightarrow p_2)$ สมมติ a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$ ดังนั้น

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

สรุปได้ว่า $4 \mid a^2$

$(p_2 \rightarrow p_3)$ สมมติว่า $4 \mid a^2$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม p ซึ่ง $a^2 = 4p$ ดังนั้น

$$a^2 = 2(2p)$$

สรุปได้ว่า a^2 เป็นจำนวนคู่

$(p_3 \rightarrow p_1)$ เป็นจริงโดยตัวอย่าง 3.1.6 □

3.4 การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง

ถ้าการพิสูจน์ข้อความโดยวิธีต่าง ๆ ที่ผ่านมาแล้วไม่สามารถทำได้ ในหัวข้อนี้จะนำเสนอทางเลือกอีกวิธีหนึ่ง ถ้าต้องการพิสูจน์ p เป็นจริงโดยการสมมติว่า $\sim p$ เป็นจริง แล้วนำไปสู่ข้อความขัดแย้ง c หรือเกิดประพจน์ $r \wedge \sim r$ การพิสูจน์แบบนี้ได้จากสัจนิรันดร์ (T15) $(\sim p \rightarrow c) \rightarrow p$ เรียกวิธีนี้ว่า **การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (Proof by contradiction)** มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\sim p$ เป็นจริง

$\vdots$

ดังนั้น เกิดข้อขัดแย้ง

สรุปว่า p เป็นจริง □

ตัวอย่าง 3.4.1 จงพิสูจน์ว่า "ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามที่ไม่ใช่ศูนย์ จะได้ว่า $x^{-1} \neq 0$ " โดยวิธีขัดแย้ง

แนวคิด ให้ p แทนข้อความ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$ สมมติว่า $\sim p$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$

เนื่องจาก $x \neq 0$ โดยสมบัติจำนวนจริงจะได้ว่า $x(x^{-1}) = 1$ แต่จากการสมมติ $x^{-1} = 0$ จะได้ว่า

$$1 = x(x^{-1}) = x(0) = 0$$

เกิดขัดแย้ง ดังนั้นข้อความข้างต้นที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง □

ตัวอย่าง 3.4.2 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า x, y เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 - 4y \neq 2$ " โดยวิธีขัดแย้ง

ให้ p แทนข้อความ $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 4y \neq 2$ สมมติว่า $\sim p$ เป็นจริง นั่นคือ $\exists x, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 4y = 2$

บทพิสูจน์. สมมติว่ามีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $x^2 - 4y = 2$ แล้ว

$$x^2 = 2(2y + 1)$$

ดังนั้น x^2 เป็นจำนวนคู่ โดยตัวอย่าง 3.1.6 ทำให้ได้ว่า x เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $x = 2k$ ทำให้ได้ว่า

$$(2k)^2 - 4y = 2$$

$$4k^2 - 4y = 2$$

$$2k^2 - 2y = 1$$

$$2(k^2 - y) = 1$$

จะได้ว่า 1 เป็นจำนวนคู่ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นข้อความข้างต้นที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง □

ตัวอย่าง 3.4.3 จงพิสูจน์ $\forall a, b \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon > 0, a \leq b + \epsilon) \rightarrow (a \leq b)$

แนวคิด พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง สมมติว่า $\exists a, b \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon > 0, a \leq b + \epsilon) \wedge (a > b)$ เป็นจริง

บทพิสูจน์. สมมติว่ามีจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a \leq b + \epsilon$ ไม่ว่า ϵ เป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม และ $a > b$

$$\text{เพราะว่า } a > b \text{ ดังนั้น } \frac{a-b}{2} > 0 \text{ เนื่องจาก } a-b > \frac{a-b}{2}$$

ดังนั้น $a > b + \frac{a-b}{2}$ แสดงว่ามี $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ ที่ทำให้ $a > b + \epsilon$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่สมมติไว้ว่า $a \leq b + \epsilon$

ไม่ว่า ϵ เป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม ดังนั้นข้อความข้างต้นที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง □

บทนิยาม 3.4.4 เรียกจำนวนจริง a ว่า **จำนวนตรรกยะ (Rational number)** ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม b และจำนวนเต็ม c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ซึ่ง $a = \frac{b}{c}$ สำหรับจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะจะเรียกว่า **จำนวนอตรรกยะ (Irrational number)**

ตัวอย่าง 3.4.5 จงพิสูจน์ว่า " $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ"

แนวคิด พิสูจน์ข้อความนี้โดยวิธีขัดแย้ง นั่นคือสมมติว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้วหาข้อขัดแย้ง

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\sqrt{2}$ จะเป็นจำนวนตรรกยะ แล้วจะได้ว่ามีจำนวนเต็ม b และจำนวนเต็ม c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ซึ่ง $\sqrt{2} = \frac{b}{c}$ และตัวหารร่วมมากของ b และ c เท่ากับ 1 (เศษส่วนอย่างต่ำ) แล้ว

$$b = \sqrt{2}c$$

$$b^2 = 2c^2$$

ดังนั้น b^2 เป็นจำนวนคู่ โดยตัวอย่าง 3.1.6 จะได้ว่า b เป็นจำนวนคู่ นั่นคือมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $b = 2k$ แล้ว

$$(2k)^2 = 2c^2$$

$$2k^2 = c^2$$

ดังนั้น c^2 เป็นจำนวนคู่ โดยตัวอย่าง 3.1.6 จะได้ว่า c เป็นจำนวนคู่ สรุปได้ว่า b และ c เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นตัวหารร่วมมากของ b และ c ไม่เท่ากับ 1 เกิดข้อขัดแย้ง ทำให้สรุปได้ว่า $\sqrt{2}$ จะเป็นจำนวนอตรรกยะ $\square$

บทนิยาม 3.4.6 จะเรียกจำนวนเต็มบวก p ที่มากกว่า 1 ว่าเป็น**จำนวนเฉพาะ** (Prime number) ก็ต่อเมื่อตัวหารของ p มี 1 กับ p เท่านั้น

ตัวอย่าง 3.4.7 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนเฉพาะเป็นจำนวนอนันต์"

บทพิสูจน์. สมมติว่าจำนวนเฉพาะมีจำกัด ให้ P เป็นจำนวนเฉพาะมากที่สุด กำหนดให้ Q คือผลบวกของ 1 กับผลคูณของจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 2 ถึง P นั่นคือ

$$Q = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots \times P + 1$$

จะเห็นได้ชัดว่า Q เป็นจำนวนที่มากกว่า P ดังนั้น Q ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ นั่นคือต้องมีจำนวนเฉพาะหารมันลงตัว จากรูปแบบของ Q ที่กำหนดจะเห็นได้ชัดว่าจะไม่มีจำนวนเฉพาะใด ๆ ตั้งแต่ 2 ถึง P ที่หาร Q ได้ลงตัวเพราะมันจะเหลือเศษ 1 เสมอ ดังนั้นจะต้องมีจำนวนเฉพาะที่สูงกว่า P \square

3.5 การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้เพียงอย่างเดียว

ข้อความที่เป็นไปได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้นเขียนแทนด้วย $\exists!x \in \mathcal{U}, p(x)$ ข้อความนี้สมมูลกับ

$$(\exists x \in \mathcal{U}, p(x)) \wedge (\forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

ดังนั้นการพิสูจน์ $\exists!x \in \mathcal{U}, p(x)$ แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วนคือ

1. $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ อย่างน้อยหนึ่งตัว (Existence)
2. $\forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น (Uniqueness)

ตัวอย่าง 3.5.1 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $2^x = 1$ "

แนวคิด เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\exists!x \in \mathbb{R}, 2^x = 1$

บทพิสูจน์. ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$2^x = 2^0 = 1$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ สมมติ $2^x = 1$ และ $2^y = 1$ แล้ว

$$2^x = 1 = 2^y \quad \text{ดังนั้น} \quad 2^x = 2^y$$

จากสมบัติของเลขยกกำลังจะได้ว่า $x = y$ □

ตัวอย่าง 3.5.2 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $x^3 + 1 = 0$ "

แนวคิด เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $\exists!x \in \mathbb{R}, x^3 + 1 = 0$

บทพิสูจน์. ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $x = -1$ จะได้ว่า $x^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ สมมติ $x^3 + 1 = 0$ และ $y^3 + 1 = 0$ แล้ว

$$x^3 + 1 = 0 = y^3 + 1 \quad \text{ดังนั้น} \quad x^3 = y^3$$

จากสมบัติของจำนวนจริงจะได้ว่า $x = y$ □

ตัวอย่าง 3.5.3 จงพิสูจน์ว่า "ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 1$ "

แนวคิด เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $\forall x \in \mathbb{R} \exists!y \in \mathbb{R}, x + y = 1$

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $y = 1 - x$ ซึ่ง $y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$x + y = x + (1 - x) = 1$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $y, z \in \mathbb{R}$ สอดคล้อง $x + y = 1$ และ $x + z = 1$ แล้ว

$$x + y = 1 = x + z \quad \text{ดังนั้น} \quad x + y = x + z$$

จากสมบัติการตัดออกของการบวกบนจำนวนจริงจะได้ว่า $y = z$ □

ตัวอย่าง 3.5.4 จงพิสูจน์ว่า

"มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + y = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y "

แนวคิด เขียนในรูปสัญลักษณ์คือ $\exists! x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y$

บทพิสูจน์. ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$0 + y = y \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } y$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $x, z \in \mathbb{R}$ สอดคล้อง $x + y = y$ และ $z + y = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y แล้ว

$$x + y = y = z + y \quad \text{ดังนั้น} \quad x + y = z + y$$

จากสมบัติการตัดออกของการบวกบนจำนวนจริงจะได้ว่า $x = z$ □

จากทั้ง 4 ตัวอย่างทำให้พอเห็นภาพการพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้โดยตรง ต่อไปจะแสดงว่าข้อความที่มีเพียงหนึ่งเดียวเป็นเท็จโดยแสดงให้เห็นได้ว่า

$$(\exists x \in \mathcal{U}, p(x)) \wedge (\forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

เป็นเท็จซึ่งเพียงพอที่จะแสดงว่าขั้นตอน 1 หรือ 2 เป็นเท็จได้ดังนี้

1. $p(x)$ เป็นเท็จ ทุก ๆ $x \in \mathcal{U}$ หรือ
2. เลือก $x, y \in \mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$ และ $p(y)$ แต่ $x \neq y$

ตัวอย่าง 3.5.5 พิจารณาค่าความจริงของ $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$

วิธีทำ เนื่องจากขั้นที่ 2 เป็นเท็จโดยการเลือก $x = 1$ และ $x = -1$ ซึ่ง $x^2 = 1^2 = 1$ และ $x^2 = (-1)^2 = 1$ แต่ $1 \neq -1$

นิเสธของ $\exists! x \in \mathcal{U}, p(x)$ คือ $\sim \exists! x \in \mathcal{U}, p(x)$ เมื่อดูตามความหมายจะได้ว่า

$$\sim (\exists x \in \mathcal{U}, p(x) \wedge \forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

สมมูลกับ

$$(\forall x \in \mathcal{U}, \sim p(x)) \vee (\exists x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y)$$

การหานิเสธของข้อความซึ่งเป็นไปได้โดยตรง แสดงให้เห็นว่าการหานิเสธต้องอาศัยความหมายที่แท้จริงมิใช่ยึดติดเพียงรูปแบบเท่านั้น

ถ้าจะแสดงว่าประพจน์ p เป็นเท็จ อาจจะพิสูจน์ประพจน์ $\sim p$ เป็นจริงแทนก็ได้ ตัวอย่างเช่น

$$\exists x \in \mathcal{U}, p(x) \text{ เป็นเท็จ} \quad \text{สมมูลกับการพิสูจน์} \quad \forall x \in \mathcal{U}, \sim p(x) \text{ เป็นจริง}$$

คือการพิสูจน์ว่าไม่มี x ใดใน U ที่สอดคล้อง $p(x)$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.5.6 จงพิสูจน์ว่า $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ เป็นเท็จ

แนวคิด ต้องพิสูจน์ข้อความ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ เป็นจริง

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จากสมบัติจำนวนจริงจะได้ว่า $x^2 \geq 0$ ดังนั้น

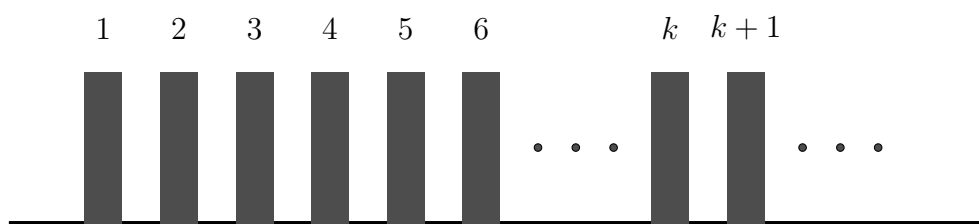
$$x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$$

สรุปได้ว่า $x^2 + 1 \neq 0$ □

3.6 การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ทุกคนคงเคยเล่นโดมิโนที่เมื่อผลักตัวโดมิโนตัวแรกแล้วจะทำให้ตัวถัด ๆ ไปล้มทับกันไปเรื่อย ๆ หลักการพิสูจน์ประพจน์ที่มีเอกภาพสัมพัทธ์เป็นจำนวนนับในรูปแบบ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ นับว่ามีหลักการคล้ายคลึงกับโดมิโน คือการเรียงตัวต่อกันไปไม่มีที่สิ้นสุดเพียงแค่ผลักตัวแรกให้ล้ม

หลักโดมิโน (Domino principle) มีวิธีการก็คือต้องผลักชิ้นแรกให้ล้มเสียก่อน เรียกขั้นนี้ว่า **ขั้นฐาน (basic step)** จากนั้นต้องตรวจสอบว่าแต่ละชิ้นจะล้มไปไม่มีที่สิ้นสุดจริงหรือไม่ ด้วยการตรวจสอบขั้นที่ 2 คือตรวจสอบโดมิโนทุก ๆ คู่ โดยที่ขั้นที่ k ต้องล้มไปทับขั้นที่ $k+1$ เสมอ เรียกขั้นนี้ว่า **ขั้นอุปนัย (Inductive step)** ดังรูป



รูปที่ 9 การเปรียบเทียบหลักโดมิโนกับหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริงทำได้ 2 ขั้นตอน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6.1 ให้ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า

1. **ขั้นฐาน** : $P(1)$ เป็นจริง และ
2. **ขั้นอุปนัย** : $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.6.2 จงแสดงว่า $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. **ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. **ขั้นอุปนัย** : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \left[\frac{k}{2} + 1 \right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n



ตัวอย่าง 3.6.3 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \mid (5^n - 1)$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $4 \mid (5^n - 1)$

1. **ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $5^1 - 1 = 4$ นั่นคือ $4 \mid (5^1 - 1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. **ขั้นอุปนัย** : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $4 \mid (5^k - 1)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $5^k - 1 = 4m$ หรือ $5^k = 1 + 4m$ แล้ว

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5 \cdot 5^k - 1 = 5(1 + 4m) - 1 \\ &= 4(1 + 5m) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $4 \mid (5^{k+1} - 1)$ ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $4 \mid (5^n - 1)$ สำหรับทุกจำนวนนับ n



ตัวอย่าง 3.6.4 จงแสดงว่า $(3!)^n \mid (3n)!$ สำหรับจำนวนนับ n

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $(3!)^n \mid (3n)!$

1. **ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $(3!)^1 = 3! = (3 \cdot 1)!$ นั่นคือ $(3!)^1 \mid (3 \cdot 1)!$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
2. **ขั้นอุปนัย** : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $(3!)^k \mid (3k)!$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $(3k)! = m(3!)^k$ แล้ว

$$\begin{aligned}(3(k+1))! &= (3k+3)! = (3k+3)(3k+2)(3k+1)(3k)! \\ &= 3(k+1)(3k+2)(3k+1)m(3!)^k\end{aligned}$$

เมื่อให้ $a = 3k+1$ จะได้ $(3k+2)(3k+1) = (a+1)a = a^2 + a$ โดยตัวอย่าง 3.2.1 จะได้ว่า $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ

$$(3k+2)(3k+1) = 2p$$

สำหรับบางจำนวนเต็ม p ดังนั้น

$$\begin{aligned}(3(k+1))! &= 3(k+1)2pm(3!)^k = (k+1)pm \cdot 6(3!)^k \\ &= (k+1)pm \cdot 3!(3!)^k = (k+1)pm \cdot (3!)^{k+1}\end{aligned}$$

จะได้ว่า $(3!)^{k+1} \mid (3(k+1))!$ ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $(3!)^n \mid (3n)!$ สำหรับทุกจำนวนนับ n □

ตัวอย่าง 3.6.5 จงแสดงว่า $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n < 2^{n+1}$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $2^n < 2^{n+1}$

1. **ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $2^1 = 2 < 4 = 2^2 = 2^{1+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
2. **ขั้นอุปนัย** : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $2^k < 2^{k+1}$ โดยสมมติฐานข้างต้นจะได้ว่า

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+2}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n < 2^{n+1}$ □

ต่อไปจะกล่าวถึงการพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เริ่มขั้นฐานด้วย n_0

ทฤษฎีบท 3.6.6 ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า

1. **ขั้นฐาน** : $P(n_0)$ เป็นจริง

2. **ขั้นอุปนัย** : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n_0, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ เป็นจริง หรือ $P(n)$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 3.6.7 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \geq n^2$

บทพิสูจน์. พิจารณา $2 = 2^1 \geq 1^2 = 1$, $4 = 2^2 \geq 2^2 = 4$, $8 = 2^3 \geq 3^2 = 9$, $16 = 2^4 \geq 4^2 = 16$, $32 = 2^5 \leq 5^2 = 25$, $64 = 2^6 \leq 6^2 = 36$ ดังนั้นข้อความนี้เป็นจริงเมื่อเริ่ม $n_0 = 4$ นั่นคือพิสูจน์ข้อความ

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 2^n \geq n^2$$

1. **ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $16 = 2^4 \geq 4^2 = 16$ ดังนั้น $P(4)$ เป็นจริง

2. **ขั้นอุปนัย** : สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนนับ $k \geq 4$ นั่นคือ $2^k \geq k^2$

เนื่องจาก $k \geq 4$ ดังนั้น $k^2 \geq 4k = 2k + 2k$ และ $2k > 1$ สรุปได้ว่า $k^2 \geq 2k + 1$ จากสมมติฐานจะได้

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \geq 2(k^2) = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

ดังนั้น $2^n \geq n^2$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ $n \geq 4$ □

ตัวอย่าง 3.6.8 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \leq n!$

บทพิสูจน์. พิจารณา $2^1 = 2 > 1 = 1!$, $2^2 = 4 > 2 = 2!$, $2^3 = 8 > 6 = 3!$, $2^4 = 16 \leq 24 = 4!$, $2^5 = 32 \leq 120 = 5!$ ดังนั้นข้อความนี้เป็นจริงเมื่อเริ่ม $n_0 = 4$ นั่นคือพิสูจน์ข้อความ

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 2^n \leq n!$$

1. **ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $2^4 = 16 \leq 24 = 4!$ ดังนั้น $P(4)$ เป็นจริง

2. **ขั้นอุปนัย** : สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนนับ $k \geq 4$ นั่นคือ $2^k \leq k!$ จะได้ว่า

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot k!$$

เนื่องจาก $k \geq 4$ ดังนั้น $k+1 \geq 5 > 2$ ทำให้ได้ว่า

$$2^{k+1} \leq (k+1)k! = (k+1)!$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 2^n < n!$ □

สรุป

วิธีการพิสูจน์ในบทนี้มีทั้งหมด 6 วิธี โดยแต่ละวิธีมีรูปแบบและโครงการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

1. การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข คือการพิสูจน์ข้อความในรูป $p \rightarrow q$ โดยมีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ	p	เป็นจริง	
	$\vdots$		
ดังนั้น	q	เป็นจริง	$\square$

เรียกว่าการพิสูจน์โดยวิธีตรง ในกรณีที่พิสูจน์ดังกล่าวไม่ได้จะ使用方法การแย้งกลับที่มีโครงการพิสูจน์คือ

สมมติ	$\sim q$	เป็นจริง	
	$\vdots$		
ดังนั้น	$\sim p$	เป็นจริง	$\square$

สำหรับการพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow (q \wedge r)$ ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง 2 ข้อความเป็นจริงคือ $p \rightarrow q$ และ $p \rightarrow r$

2. การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี คือการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $(p \vee q) \rightarrow r$ ต้องพิสูจน์ 2 กรณีเป็นจริงคือ

กรณีที่ 1 $p \rightarrow r$

สมมติ	p	เป็นจริง	
	$\vdots$		
ดังนั้น	r	เป็นจริง	

กรณีที่ 2 $q \rightarrow r$

สมมติ	q	เป็นจริง	
	$\vdots$		
ดังนั้น	r	เป็นจริง	$\square$

สำหรับกรณีทั่วไป $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow r$ ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง n กรณีเป็นจริง ตามโครงการพิสูจน์นี้

กรณีที่ 1 $p_1 \rightarrow r$

กรณีที่ 2 $p_2 \rightarrow r$

$\vdots$

กรณีที่ n $p_n \rightarrow r$

3. การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้ คือการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \leftrightarrow q$ ต้องทำ 2 ขั้นตอน คือ

1. $p \rightarrow q$ เรียกว่าขั้น sufficient part (p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ q)

2. $q \rightarrow p$ เรียกว่าขั้น necessarily part (p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ q)

การพิสูจน์แบบ iff-string คือการการพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ โดยการสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจากข้อความ p ไปยังข้อความ q

$p \leftrightarrow q_1$	เขียนแทนด้วย	$p \leftrightarrow q_1$
$q_1 \leftrightarrow q_2$		$\leftrightarrow q_2$
$q_2 \leftrightarrow q_3$		$\leftrightarrow q_3$
$\vdots$		$\vdots$
$q_n \leftrightarrow q$		$\leftrightarrow q$

อาจกล่าวได้ว่าการพิสูจน์ข้อมูลที่สมมูลกัน จะพิจารณาข้อความที่สมมูลกันเป็นคู่เช่น

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge (p_3 \leftrightarrow p_1)$$

สามารถพิสูจน์ได้จาก

$$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)$$

4. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง คือการพิสูจน์ p เป็นจริงโดยการสมมติว่า $\sim p$ เป็นจริง แล้วนำไปสู่ข้อความขัดแย้ง c มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ	$\sim p$ เป็นจริง	
$\vdots$		
ดังนั้น	เกิดข้อขัดแย้ง	$\square$

การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้งจะบอกไม่ได้ว่าขัดแย้งตรงไหนซึ่งเป็นความยุ่งยากของวิธีนี้ ผู้พิสูจน์ต้องอาศัยประสบการณ์และความชำนาญ โดยในเบื้องต้น ต้องฝึกฝนการเขียนพิสูจน์และอ่านบทพิสูจน์อยู่เป็นประจำ เพื่อให้เห็นแนวทางที่หลากหลายในการพิสูจน์ ก่อนจะนำมาปรับใช้ได้ด้วยตนเองต่อไป

5. การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้โดยตรง คือ พิสูจน์ข้อความ $\exists! x \in \mathcal{U}, p(x)$ ซึ่งสมมูลกับ

$$(\exists x \in \mathcal{U}, p(x)) \wedge (\forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

ดังนั้นการพิสูจน์แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วนคือ

1. $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ อย่างน้อยหนึ่งตัว
2. $\forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น

6. การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การพิสูจน์ประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริงทำได้ 2 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นฐาน : $P(1)$ เป็นจริง
2. ขั้นอุปนัย : $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่าประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริง

ต่อไปการพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เริ่มขั้นฐานด้วย n_0 พิสูจน์ได้โดย

1. ขั้นฐาน : $P(n_0)$ เป็นจริง
2. ขั้นอุปนัย : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n_0, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่าประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ เป็นจริง

ในกรณีที่แสดงว่าประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณทั้งหมดเป็นเท็จ สามารถทำได้โดยหาตัวอย่างค้านที่ทำให้ประพจน์นั้นเป็นเท็จ สำหรับข้อความที่ต้องการพิสูจน์จะใช้วิธีใดนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อความ เมื่อผู้อ่านได้ศึกษาในแต่ละวิธีแล้วจะเข้าใจว่าควรเลือกวิธีใดที่เหมาะสมกับข้อความที่ต้องการพิสูจน์ และบางข้อความอาจพิสูจน์ได้หลายวิธีก็ได้

คำถามท้ายบท

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม
 - 1.1 ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3x$ เป็นจำนวนคู่
 - 1.2 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3n + 5m$ เป็นจำนวนคู่
 - 1.3 ถ้า m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว nm เป็นจำนวนคู่
 - 1.4 ถ้า m^3 เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่
2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้
 - 2.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $7n^2 + n + 2$ เป็นจำนวนคู่
 - 2.2 ไม่ว่า m จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม $m^3 - m + 3 + 1$ เป็นจำนวนคี่
 - 2.3 สำหรับจำนวนเต็ม n ถ้า $3 \mid (n^2 - n)$ แล้ว $6 \mid (n^2 - n)$
 - 2.4 $4 \mid (n^2 - 1)$ สำหรับจำนวนเต็มคี่ n
3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน
 - 3.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^3 - n$ เป็นจำนวนคู่
 - 3.2 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ถ้า $a \mid b^2$ แล้ว $a \mid b$
 - 3.3 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \rightarrow x^2 < y^2$
4. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม
 - 4.1 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $a^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่
 - 4.2 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a^2 + 3$ เป็นจำนวนคู่
 - 4.3 มีจำนวนจริง x และ y ใด ๆ $x < y$ ก็ต่อเมื่อ $x^3 < y^3$
 - 4.4 $\forall x \in \mathbb{R} [x^3 = 1 \leftrightarrow x = 1]$
5. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยวิธี iff-string
 - 5.1 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $A - B^c = A \cap B$
 - 5.2 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 - 5.3 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
6. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

$p_1 : n$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

$p_2 : n^3$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

$p_3 : n^3 + 4$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2

7. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

7.1 $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

7.2 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า $a^2 + 2a + 5$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

7.3 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 \neq 4a + 3$

7.4 $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x + y > 2\sqrt{xy}$

8. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

8.1 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $4m$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนคู่

8.2 ผลบวกของจำนวนตรรกยะกับอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

8.3 $\forall a, b \in \mathbb{R}, [(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \rightarrow a + b \neq 0]$

8.4 $\forall x, y \in \mathbb{R}, [x < y \rightarrow |x| < |y|]$

9. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

9.1 ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 5$

9.2 มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

10. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นเท็จ

10.1 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x = x + 1$

10.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x^2 + x + 1 = 0$

10.3 $\exists n \in \mathbb{N}, 3 \mid 2^n$

11. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

11.1 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

11.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

11.3 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

11.4 $2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = n^2 + n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

11.5 $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

11.6 $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

12. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

12.1 $3 \mid (5^n - 2^n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

12.2 $5 \mid (3^{3n+1} + 2^{n+1})$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

12.3 $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ สำหรับจำนวนนับ n

13. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

13.1 $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$

13.2 $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n} \leq 2$

13.3 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, 2^{n-10}(1000) < 2^n - 2^{n-6}$

13.4 ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x > -1$ จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$

14. จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์

14.1 $2^{n-1} \leq n!$

14.3 $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

14.2 $4^n > n^4$

14.4 $n^2 < (\frac{3}{2})^n$

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2539). **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: กรมวิชาการ.
- คณะผู้เขียนวิชาคณิตศาสตร์. (2550). **ทฤษฎีจำนวน**. กรุงเทพฯ: มูลนิธิ สอวน.
- จัฐไชย์ ลีนาวงศ์. (2547). **ตรรกะแห่งการพิสูจน์**. กรุงเทพฯ: บริษัทสำนักพิมพ์ท็อปจำกัด.
- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- ชวลิต บุรพาศิริวัฒน์. (2538). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏจันทรเกษม.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ภัทรา เตชาภิวาทย์. (2540). **คณิตตรรกศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. การดำเนินการบนเซต
2. ผลบวกและผลคูณอย่างไม่เจาะจง
3. ผลคูณคาร์ทีเซียน
4. การจัดการเรียนเรื่องเซต

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถพิสูจน์เกี่ยวกับการดำเนินการบนเซต
2. สามารถพิสูจน์เกี่ยวกับอินเตอร์เซกชันและยูเนียนเพิ่มเติม
3. สามารถพิสูจน์เกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน
4. เข้าใจการจัดการเรียนรู้เรื่องเซต

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
- 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
- 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
- 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย
- 2.4 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
- 2.5 มอบหมายให้ทำ assignment เพื่อส่งท้ายคาบ

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "เซต"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "เซต"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 4

เซต

ในทางคณิตศาสตร์ถือว่า “เซต (Set)” เป็นมูลฐาน เพราะว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ล้วนมีเซตเข้ามาเกี่ยวข้อง เป็นพื้นฐานเกือบทั้งหมด (กรรณิกา กวัคเพฑูรย์. 2542. หน้า 79) ผู้ที่เริ่มใช้คำว่าเซตเป็นคนแรกคือ เกออร์ก คันทอร์ (Georg Cantor) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน และเซตก็ถูกใช้อย่างแพร่หลายในเวลาต่อมา คันทอร์ได้อธิบายเซตอย่างง่าย ๆ เพื่อความเข้าใจเบื้องต้นว่า “เซตคือกลุ่มของสิ่งของหรือจินตนาการ ซึ่งมีสมบัติบางประการคล้ายกัน และสิ่งของดังกล่าวนั้นเรียกว่า สมาชิกของเซต”

เซตเป็นคำนิยาม หมายถึงคำที่ต้องยอมรับกันในเบื้องต้นว่าไม่สามารถให้ความหมายที่รัดกุมได้ คำว่าเซตจึงหมายถึงกลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ และเมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแล้วจะสามารถบอกได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดอยู่นอกกลุ่ม เรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า **สมาชิก (Element)** (P. Glendinning 2012. หน้า 48) สิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซต ต้องเป็นสิ่งที่สามารถระบุได้อย่างแจ่มชัด (Well-defined) เพื่อที่สามารถระบุได้ว่า สิ่งนั้นเป็นสมาชิกในเซตหรือไม่ เช่น $\{1, 2, 3\}$ และ $\{\text{สีแดง}, \text{สีเหลือง}, \text{สีน้ำเงิน}\}$ เป็นต้น ถ้า a เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \in A$ และถ้า a ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \notin A$ ตัวอย่าง เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ จะเขียนได้ว่า $1 \in A$ แต่ $4 \notin A$ เป็นต้น

การเขียนเซตมี 2 วิธีคือ วิธีแจกแจงสมาชิก และวิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิก

1. **วิธีแจกแจงสมาชิก (Tubular form)** การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก คือการเขียนเซตโดยเขียนสมาชิกลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา $\{\}$ และใช้เครื่องหมายจุลภาค $(,)$ คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นต้น มีข้อตกลงในการเขียนดังนี้

- (ก) ถ้าสมาชิกในเซตซ้ำกันจะเขียนสมาชิกตัวนั้นเพียงครั้งเดียว เช่น $\{1, 1, 2, 3\}$ เขียนแทนด้วย $\{1, 2, 3\}$
- (ข) สมาชิกในเซตเดียวกันสามารถเขียนลำดับแบบใดก็ได้ซึ่งความหมายของเซตนั้นไม่เปลี่ยนแปลง เช่น $\{1, 2, 3\}$ เขียนเป็น $\{3, 1, 2\}$ หรือ $\{2, 1, 3\}$ ก็ได้ ถือว่าทั้ง 3 เซตเป็นเซตเดียวกัน
- (ค) สำหรับเซตที่มีสมาชิกจำนวนมากและบอกสมาชิกที่ตามมาได้แน่ชัด เขียน ... แทนสมาชิกลำดับถัดไปจนถึงตัวสุดท้าย ตัวอย่างเช่น

$\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ หมายถึง $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ทำนองเดียวกับสำหรับเซตที่มีสมาชิกไม่มีที่สิ้นสุด เช่น $\{1, 2, 3, \dots\}$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก 1, 2, 3 และลำดับถัดไปไม่มีที่สิ้นสุด

2. **วิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิก (Set builder form)** การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกหมายถึงสมาชิก และส่วนที่สองคือเงื่อนไขของสมาชิก โดยมีเครื่องหมาย | คั่นระหว่างสองส่วนนั้น อ่านว่า "โดยที่"

$$A = \{ \text{สมาชิก} \mid \text{เงื่อนไขของสมาชิก} \}$$

ตัวอย่างเช่น $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า } 5\}$ หมายถึง เซต A คือเซตของ x โดยที่ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 5 และเขียนแจกแจงสมาชิกได้เป็น $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ข้อสังเกตของการเขียนเซตแต่ละชนิด

1. เซตที่เขียนโดยวิธีแจกแจงสมาชิกจะสามารถเขียนโดยวิธีบอกเงื่อนไขสมาชิกได้ แต่ในบางเซตที่เขียนโดยวิธีบอกมีเงื่อนไขสมาชิกไม่สามารถเขียนโดยวิธีแจกแจงสมาชิกได้ เช่น

$$\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะที่อยู่ระหว่าง } 0 \text{ ถึง } 1\}$$

2. การเขียนเซตแบบมีเงื่อนไขเขียนได้หลายรูปแบบขึ้นอยู่กับผู้เขียน ตัวอย่างเช่น

$$\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า } 5\} \text{ หรือ } \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง } 0 \text{ ถึง } 5\}$$

หมายถึงเซตเดียวกันคือ $\{1, 2, 3, 4\}$

ในตำราเล่มนี้จะใช้สัญลักษณ์

$\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

$\mathbb{Q}^c$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

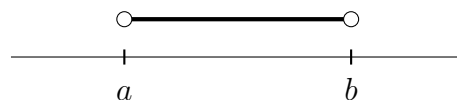
$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

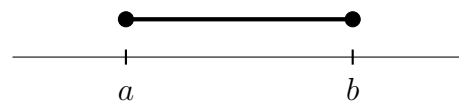
$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

ถ้าสนใจเฉพาะสมาชิกที่เป็นบวกจะเขียนเป็น $\mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$ แทนเซตจำนวนเต็มบวก จำนวนตรรกยะบวก และจำนวนจริงบวกตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน $\mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}^-$ แทนเซตจำนวนเต็มลบ จำนวนตรรกยะลบ และจำนวนจริงลบตามลำดับ สำหรับจำนวนจริง a, b ซึ่ง $a < b$ จะกำหนดให้

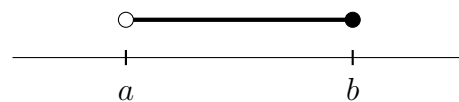
(a, b) เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



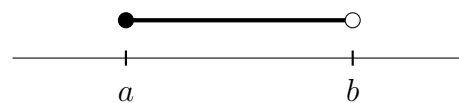
$[a, b]$ เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



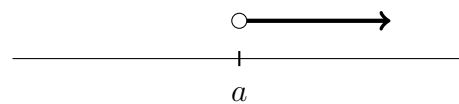
$(a, b]$ เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



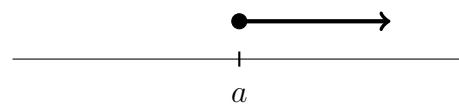
$[a, b)$ เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



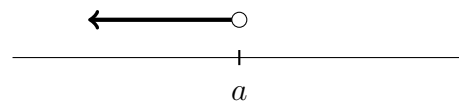
(a, ∞) เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



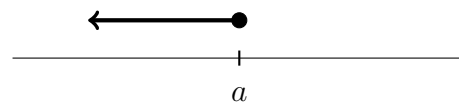
$[a, \infty)$ เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



$(-\infty, a)$ เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



$(-\infty, a]$ เขียนแทน $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



4.1 การดำเนินการบนเซต

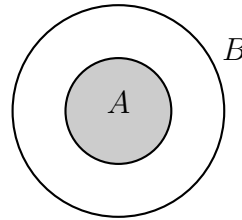
ในเบื้องต้นเพื่อให้่ายต่อการนำไปใช้ กำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

1. สำหรับเซตที่ไม่มีสมาชิกเลยเขียนแทนด้วย $\{\}$ หรือ $\emptyset$ และเรียกว่า **เซตว่าง (Empty set)**
2. **เอกภพสัมพัทธ์ (Universe)** คือเซตที่ถูกกำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่า จะกล่าวถึงสิ่งที่เป็นสมาชิกของเซตนี้เท่านั้น และนิยมใช้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์

เซตมีมากมายหลายแบบแตกต่างกันไป เมื่อสนใจเซต ๆ หนึ่ง แล้วสร้างเซตใหม่จากสมาชิกของเซตนี้ จะเรียกว่า **สับเซต (Subset)** หรือ **เซตย่อย** ดัชนีตามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะกล่าวว่า A เป็น **สับเซต** ของ B ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ สมาชิกใน A เป็นสมาชิกใน B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in U, (x \in A \rightarrow x \in B)$$



หรือกล่าวได้อีกอย่างว่า B เป็น **ซูเปอร์เซต (Superset)** ของ A เขียนแทนด้วย $B \supseteq A$ ถ้า A ไม่เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $A \not\subseteq B$ นั่นคือ

$$A \not\subseteq B \leftrightarrow \exists x \in U, (x \in A \wedge x \notin B)$$

จากนิยามจะกล่าวได้ว่า $A \subseteq A$ และ $\emptyset \subseteq A$ ทุก ๆ เซต A

ตัวอย่าง 4.1.2 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ เซตใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ A ให้

$$B = \{3, 4\}, C = \{3, 4, 6\} \text{ และ } D = \{1, \{2\}\}$$

วิธีทำ จะได้ว่า $B \subseteq A$, $C \not\subseteq A$ และ $D \not\subseteq A$ แต่เห็นได้ว่า $B \subseteq C$ ด้วย

บทนิยาม 4.1.3 จะกล่าวว่าเซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

ถ้า A ไม่เท่ากับ B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

$$A \neq B \leftrightarrow (A \not\subseteq B) \vee (B \not\subseteq A)$$

บทนิยาม 4.1.4 จะกล่าวว่าเซต A เป็น **สับเซตแท้ (Proper subset)** ของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$

$$A \subset B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

ถ้า A ไม่เป็นสับเซตแท้ของ B เขียนแทนด้วย $A \not\subset B$

$$A \not\subset B \leftrightarrow (A \not\subseteq B) \vee (A = B)$$

ตัวอย่าง 4.1.5 ให้ $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ และ $D = \{3, 5, 7, 1\}$ จงตรวจสอบว่าเซตคูใด เท่ากัน เป็นสับเซต และเป็นสับเซตแท้

วิธีทำ จะได้ว่า $A = D$ เพราะว่ามีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว และ B เป็นสับเซตแท้ของ A เพราะ $B \subseteq A$ แต่ $B \neq A$

ทฤษฎีบท 4.1.6 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่าถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

บทพิสูจน์. ให้ A, B และ C เป็นเซต สมมติว่า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$

ให้ $x \in A$ เนื่องจาก $A \subseteq B$ ดังนั้น $x \in B$ ในทำนองเดียวกัน $x \in C$ เพราะ $B \subseteq C$ สรุปได้ว่า $A \subseteq C$ $\square$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาสับเซตทั้งหมดของ $A = \{1, 2, 3\}$

วิธีทำ หาสับเซตโดยการแบ่งกรณีต่อไปนี้

กรณีไม่มีสมาชิก : $\emptyset$

กรณีมีสมาชิก 1 ตัว : $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

กรณีมีสมาชิก 2 ตัว : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

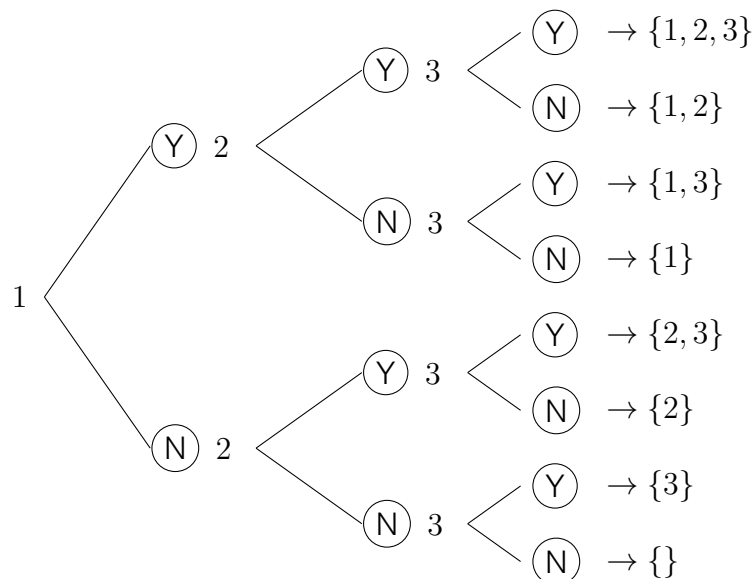
กรณีมีสมาชิก 3 ตัว : $\{1, 2, 3\}$

ดังนั้นสับเซตทั้งหมดของ A คือ $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

อาจจะหาสับเซตของ $A = \{1, 2, 3\}$ โดยใช้แผนภาพต้นไม้โดยพิจารณาสมาชิกแต่ละตัวใน A อยู่หรือไม่อยู่ในสับเซต กำหนดให้

(Y) แทนสมาชิกตัวนั้นอยู่ในสับเซต และ (N) แทนสมาชิกตัวนั้นไม่อยู่ในสับเซต

แสดงแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้



รูปที่ 10 แผนภาพต้นไม้แสดงสับเซตทั้งหมดของ $\{1, 2, 3\}$

จากการใช้แผนภาพต้นไม้ จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ $2^3 = 8$ สับเซต โดยอาศัยกฎการนับขยายแนวคิดไปยังกรณีทั่วไปกล่าวคือจำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ $2^{n(A)}$ สับเซต ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.8 ให้ A เป็นเซตจำกัด แล้วจำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ $2^{n(A)}$ สับเซต และมีจำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A)} - 1$ สับเซต

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด □

บทนิยาม 4.1.9 ให้ A เป็นเซตใด ๆ จะเรียกเซตของสับเซตทั้งหมดของ A ว่า **เซตกำลัง (Power set)** เขียนแทนด้วย $\mathcal{P}(A)$ นั่นคือ

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

จะสังเกตเห็นว่า $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ เพราะว่า $\emptyset \subseteq A$ นั่นคือ $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ ไม่ว่า A จะเป็นเซตใดก็ตาม

ตัวอย่าง 4.1.10 เซตกำลังของ $A = \{1, 2, 3\}$ คือ

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

ตัวอย่าง 4.1.11 กำหนดให้ A และ B เป็นเซต จะได้ว่าถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซต สมมติว่า $A \subseteq B$

ให้ $X \in \mathcal{P}(A)$ จะได้ว่า $X \subseteq A$ เนื่องจาก $A \subseteq B$ ดังนั้น $X \subseteq B$ สรุปได้ว่า $X \in \mathcal{P}(B)$ นั่นคือ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ □

บทนิยาม 4.1.12 ให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แล้ว

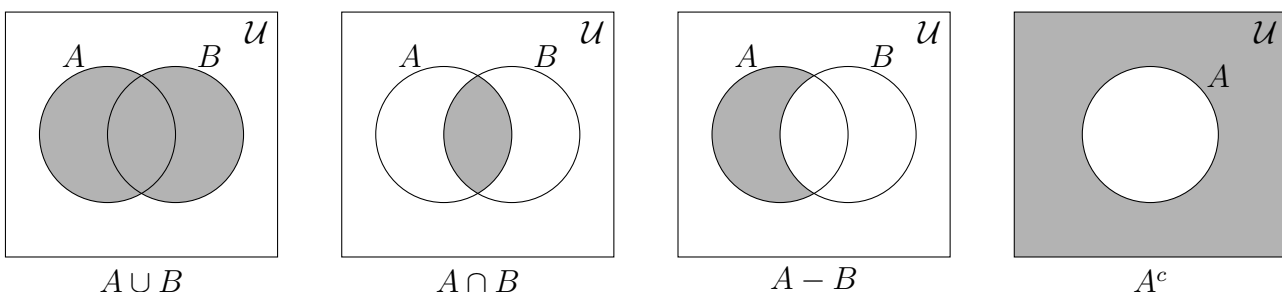
ยูเนียน (Union) $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

อินเตอร์เซกชัน (Intersection) $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$

ผลต่าง (Difference) $A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$

ส่วนเติมเต็ม (Complement) $A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$

ต่อไปนี้เป็นแผนภาพแสดงผลของการดำเนินการระหว่างเซต ให้ส่วนที่แรเงาคือ $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ และ A^c ตามลำดับ โดยใช้รูปวงกลมแทนเซต A และ B รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทน $\mathcal{U}$ ดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 11 แผนภาพการดำเนินการระหว่างเซต

ต่อไปจะเป็นกฎเกี่ยวกับการดำเนินการบนเซตที่มักถูกอ้างอิงบ่อยครั้ง และสามารถพิสูจน์โดยใช้วิธี iff-string (ให้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด) กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า

$$S1 \quad A \cap A = A$$

กฎนิพจน์ (Idempotent laws)

$$A \cup A = A$$

$$S2 \quad A \cap B = B \cap A$$

กฎการสลับที่ (Commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$S3 \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative laws)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$S4 \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

กฎการแจกแจง (Distributive laws)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$S5 \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's laws)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$S6 \quad (A^c)^c = A$$

กฎส่วนเติมเต็มซ้อน (Double complement law)

ตัวอย่าง 4.1.13 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซต สมมติว่า $A \cup B = B$ ให้ $x \in A$ จะได้ว่า $x \in A \cup B$ เนื่องจาก $A \cup B = B$ ดังนั้น $x \in B$ สรุปได้ว่า $A \subseteq B$ ในทางกลับกัน สมมติว่า $A \subseteq B$ เห็นได้ชัดว่า $B \subseteq A \cup B$ ให้ $x \in A \cup B$ ถ้า $x \in B$ จะได้ข้อสรุปทันทีว่า $A \cup B \subseteq B$ ถ้า $x \in A$ จะได้ว่า $x \in B$ เพราะว่า $A \subseteq B$ ดังนั้น $A \cup B \subseteq B$ สรุปได้ว่า $A \cup B = B$ $\square$

ตัวอย่าง 4.1.14 จงพิสูจน์ว่า "สำหรับเซต A และ B ใด ๆ $B \cap (A - B) = \emptyset$ "

บทพิสูจน์. พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง สมมติ $B \cap (A - B) \neq \emptyset$ จะได้ว่ามี $x \in B \cap (A - B)$ นั่นคือ $x \in B$ และ $x \in A - B$ ทำให้ได้ว่า $x \in A$ และ $x \notin B$ เกิดข้อขัดแย้ง สรุปได้ว่า $B \cap (A - B) = \emptyset$ $\square$

ตัวอย่าง 4.1.15 สำหรับเซต A, B และ C ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A \subseteq B \cap C$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$

บทพิสูจน์. ให้ A, B และ C เป็นเซต สมมติว่า $A \subseteq B \cap C$ ให้ $x \in A$ จะได้ว่า $x \in B \cap C$ เนื่องจาก $A \subseteq B \cap C$ ดังนั้น $x \in B$ และ $x \in C$ สรุปได้ว่า $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ ในทางกลับกัน สมมติว่า $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ ให้ $x \in A$ จะได้ว่า $x \in B$ และ $x \in C$ โดยสมมติฐาน ดังนั้น $x \in B \cap C$ สรุปได้ว่า $A \subseteq B \cap C$ $\square$

ตัวอย่าง 4.1.16 จงพิสูจน์ว่า สำหรับเซต A และ B ใด ๆ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซต

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\leftrightarrow (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq B) && \text{(จากตัวอย่าง 4.1.15)} \\ &\leftrightarrow (X \in \mathcal{P}(A)) \wedge (X \in \mathcal{P}(B)) \\ &\leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ □

4.2 ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันเพิ่มเติม

พิจารณาตัวอย่าง $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ เมื่อ

$$A_1 = [0, 1]$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}$$

$$A_2 = \{0.5, 1, 2\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 4\}$$

เซตของดัชนีล่าง $\{1, 2, 3, 4\}$ เรียกว่า **เซตดรรชนี** (Index set) หรือเขียนได้ว่า A_α เมื่อ $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$

ตัวอย่าง 4.2.1 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ ให้ Λ (อ่านว่าแลมปดา) เป็นเซตดรรชนี และ

$$A_\alpha = \{1, 2, 3, \dots, \alpha\}$$

สำหรับแต่ละ $\alpha \in \Lambda$ จงหา A_α ทั้งหมด

- เมื่อ $\Lambda = \{1, 3, 5\}$

วิธีทำ จะได้ว่า $A_1 = \{1\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$ และ $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- เมื่อ $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$

วิธีทำ จะได้ว่า $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$ และ $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ

$$A_x = (x - 1, x + 1)$$

สำหรับแต่ละ $x \in \Lambda$ จงหา A_α ทั้งหมด

- เมื่อ $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$

วิธีทำ จะได้ว่า $A_{-1} = (-2, 0)$, $A_0 = (-1, 1)$ และ $A_1 = (0, 2)$

- เมื่อ $\Lambda = \{0.5, 1.2, 4\}$

วิธีทำ จะได้ว่า $A_{0.5} = (-0.5, 1.5)$, $A_{1.2} = (0.2, 2.2)$ และ $A_4 = (3, 5)$

บทนิยาม 4.2.3 ให้ Λ เป็นเซตคอรซนี จะได้ว่า

1. ยูเนียนใด ๆ นิยามโดย

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid x \text{ เป็นสมาชิกของ } A_\alpha \text{ สำหรับบาง } \alpha \in \Lambda\} \text{ หรือ } \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}$$

2. อินเตอร์เซกชันใด ๆ นิยามโดย

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid x \text{ เป็นสมาชิกของ } A_\alpha \text{ ทุก } \alpha \in \Lambda\} \text{ หรือ } \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}$$

กรณี $\Lambda = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ เขียนเป็น $\bigcup_{i=1}^n A_i$ และ $\bigcap_{i=1}^n A_i$ และกรณี $\Lambda = \mathbb{N}$ เขียนเป็น $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ และ $\bigcap_{i=1}^\infty A_i$

$$\text{ตัวอย่างเช่น } \bigcup_{i=1}^3 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \text{ และ } \bigcap_{i=1}^4 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

ตัวอย่าง 4.2.4 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ ให้ $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ จงหา

$$1. \bigcup_{i=1}^{10} A_i \text{ และ } \bigcap_{i=1}^{10} A_i$$

วิธีทำ

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{1, 2\}$$

$$A_3 = \{1, 2, 3\}$$

$$\vdots$$

$$A_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\text{ดังนั้น } \bigcup_{i=1}^{10} A_i = \{1, 2, 3, \dots, 10\} = A_{10} \text{ และ } \bigcap_{i=1}^{10} A_i = \{1\} = A_1$$

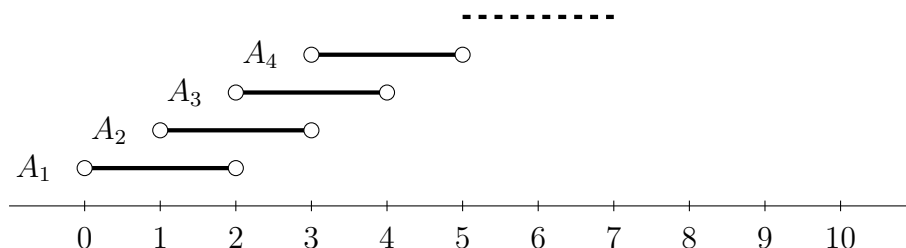
$$2. \bigcup_{i=1}^\infty A_i \text{ และ } \bigcap_{i=1}^\infty A_i$$

$$\text{วิธีทำ จากข้อ 1 โดยการดูแนวโน้มจะได้ว่า } \bigcup_{i=1}^\infty A_i = \mathbb{N} \text{ และ } \bigcap_{i=1}^\infty A_i = \{1\} = A_1$$

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหาเซตต่อไปนี้

$$1. \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ และ } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ เมื่อ } A_n = (n-1, n+1)$$

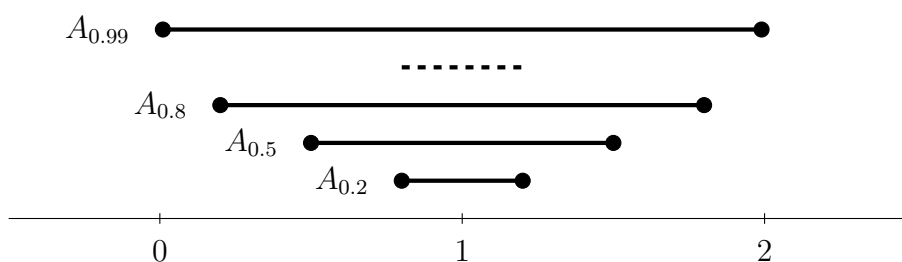
วิธีทำ



$$\text{ดังนั้น } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = (0, \infty) \text{ และ } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

$$2. \bigcup_{x \in (0,1)} A_x \text{ และ } \bigcap_{x \in (0,1)} A_x \text{ เมื่อ } A_x = [1-x, 1+x]$$

วิธีทำ



$$\text{ดังนั้น } \bigcup_{x \in (0,1)} A_x = (0, 1) \text{ และ } \bigcap_{x \in (0,1)} A_x = \{1\}$$

การหายูเนียนและอินเตอร์เซกชันใด ๆ ข้างต้นเป็นแค่การคาดการณ์เท่านั้น ในลำดับถัดไปจะเสนอการพิสูจน์เพื่อยืนยันความจริงของคำตอบ ในกรณีที่เซตตรงนี้เป็นจำนวนนับจะใช้หลักการของอาร์คิมิดีส (ทฤษฎีบท ?? และบทแทรก 8.4.15) มาช่วยในการพิสูจน์ซึ่งกล่าวไว้ว่า

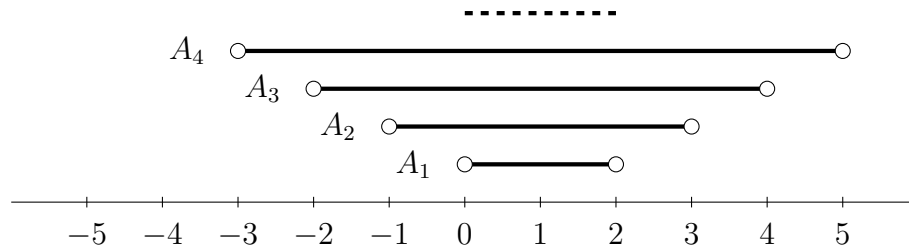
1. ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนนับ n ซึ่ง $x < n$ หรือ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$
2. ทุก ๆ จำนวนจริงบวก x จะมีจำนวนนับ n ซึ่ง $\frac{1}{n} < x$ หรือ $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < x$

ตัวอย่าง 4.2.6 กำหนดให้ $A_n = (1 - n, 1 + n)$ จงหาเซตต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

2. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

วิธีทำ พิจารณา



ดังนั้น $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ และ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 2)$

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดว่า $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{R}$ เพราะ A_n เป็นสับเซตของจำนวนจริงทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ เหลือเพียง

แสดงว่า $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า $x - 1 \in \mathbb{R}$

กรณีที่ $x - 1 \geq 0$ โดยหลักอาร์คิมิดีสจะได้ว่ามีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $x - 1 < n_0$ แล้ว

$$-n_0 < 0 \leq x - 1 < n_0$$

$$1 - n_0 < x < 1 + n_0$$

ดังนั้น $x \in A_{n_0}$ สรุปได้ว่า $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ นั่นคือ $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

กรณีที่ $x - 1 < 0$ จะได้ว่า $1 - x > 0$ โดยหลักอาร์คิมิดีสจะได้ว่ามีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $1 - x < n_0$ แล้ว

$$-n_0 < 0 \leq 1 - x < n_0$$

$$-1 - n_0 < -x < -1 + n_0$$

$$1 - n_0 < x < 1 + n_0$$

ดังนั้น $x \in A_{n_0}$ สรุปได้ว่า $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ นั่นคือ $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

□

$$2. \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 2)$$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ จะได้ว่า $x \in A_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือ

$$1 - n < x < 1 + n \quad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

เลือก $n = 1$ จะได้ว่า $0 < x < 2$ สรุปได้ว่า $x \in (0, 2)$ ดังนั้น $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq (0, 2)$ แสดงสับเซตอีกด้าน

โดย ให้ $x \in (0, 2)$ นั่นคือ $0 < x < 2$ ทำให้ได้ว่า $-1 < x - 1 < 1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n จะได้ว่า $n \geq 1$ และ $-n \leq -1$ ดังนั้น $-n \leq -1 < x - 1 < 1 \leq n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

$$1 - n < x < 1 + n \quad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

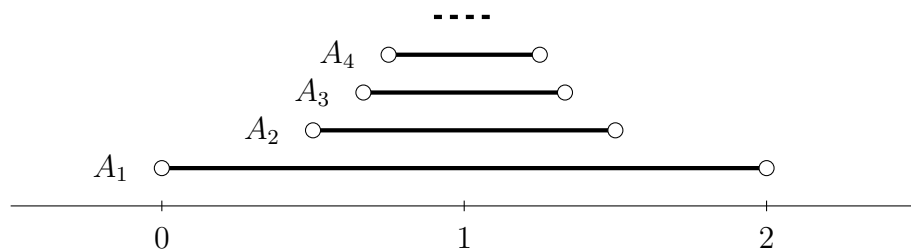
ดังนั้น $x \in A_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ กล่าวคือ $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ นั่นคือ $(0, 2) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ □

ตัวอย่าง 4.2.7 จงหายูเนียนใด ๆ และอินเตอร์เซกชันใด ๆ ต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

$$1. \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$2. \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

วิธีทำ ให้ $A_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ พิจารณา



ดังนั้น $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 2)$ และ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$

$$1. \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 2)$$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ จะได้ว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $x \in A_{n_0}$ นั่นคือ $1 - \frac{1}{n_0} < x < 1 + \frac{1}{n_0}$

เนื่องจาก $n_0 \geq 1$ ดังนั้น $\frac{1}{n_0} \leq 1$ และ $-1 \leq -\frac{1}{n_0}$ ทำให้ได้ว่า

$$0 < 1 - \frac{1}{n_0} < x < 1 + \frac{1}{n_0} < 2$$

ดังนั้น $x \in (0, 2)$ สรุปได้ว่า $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq (0, 2)$ แสดงสับเซตกลับโดย ให้ $x \in (0, 2)$ เนื่องจาก $A_1 = (0, 2)$ ดังนั้น $x \in A_1$ ทำให้ได้ว่า $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ สรุปได้ว่า $(0, 2) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ $\square$

$$2. \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ จะได้ว่า $1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ หรือกล่าวได้ว่า

$$-\frac{1}{n} < x - 1 < \frac{1}{n} \quad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

จะแสดงว่า $x = 1$ โดยวิธีขัดแย้งสมมติว่า $x \neq 1$ ดังนั้น $x - 1 \neq 0$

กรณีที่ $x - 1 > 0$ โดยหลักอาร์คิมิดีสจะได้ว่ามี n_0 ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < x - 1$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ $x - 1 < 0$ จะได้ว่า $1 - x > 0$ โดยหลักอาร์คิมิดีสจะได้ว่ามี n_0 ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < 1 - x$ หรือ $-\frac{1}{n_0} > x - 1$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $x = 1$ ต่อไปแสดงสับเซตอีกด้าน ให้ $x = 1$ เนื่องจาก $n \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า $n \geq 1$ และ $\frac{1}{n} > 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า

$$1 - \frac{1}{n} < 1 < 1 + \frac{1}{n} \quad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

นั่นคือ $x = 1 \in A_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $1 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ $\square$

ตัวอย่าง 4.2.8 จงพิสูจน์ว่า $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{n}, 1) = \emptyset$

บทพิสูจน์. พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง สมมติ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{n}, 1) \neq \emptyset$ นั่นคือมี $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{n}, 1)$ จะได้ว่า

$$1 - \frac{1}{n} < x < 1 \quad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

จาก $x < 1$ ทำให้ได้ว่า $1 - x > 0$ โดยหลักอาร์คิมิดีสจะได้ว่ามี n_0 ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < 1 - x$ นั่นคือ $x < 1 - \frac{1}{n_0}$

เกิดข้อขัดแย้ง สรุปได้ว่า $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{n}, 1) = \emptyset$ $\square$

ทฤษฎีบท 4.2.9 ให้ Λ เป็นเซตคอรรีนนี่ และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha \in \Lambda$ แล้ว

$$1. \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha)^c$$

$$2. \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha)^c$$

บทพิสูจน์. 1.

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^c &\leftrightarrow x \notin \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \\ &\leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda, x \notin A_\alpha \\ &\leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda, x \in (A_\alpha)^c \\ &\leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha)^c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha)^c$$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด



ทฤษฎีบท 4.2.10 ให้ Λ เป็นเซตคอรรีนนี่ และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha \in \Lambda$ และ B เป็นเซตใด ๆ

$$1. B \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cup A_\alpha)$$

$$5. B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cap A_\alpha)$$

$$2. \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cup B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cup B)$$

$$6. \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cap B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cap B)$$

$$3. B \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (B \cap A_\alpha)$$

$$7. B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (B \cup A_\alpha)$$

$$4. \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cap B = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cap B)$$

$$8. \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cup B = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cup B)$$

บทพิสูจน์. 1.

$$\begin{aligned} x \in B \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) &\leftrightarrow x \in B \vee x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \\ &\leftrightarrow x \in B \vee \exists \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha \\ &\leftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda, x \in B \vee x \in A_\alpha \\ &\leftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda, x \in B \cup A_\alpha \\ &\leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cup A_\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } B \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cup A_\alpha)$$

ข้อ 2-8 ทำเป็นแบบฝึกหัด



4.3 ผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะเรียก (a, b) ว่า **คู่อันดับ (Ordered pair)** a เรียกว่าสมาชิกตัวหน้า b เรียกว่าสมาชิกตัวหลัง ในทางเรขาคณิตคู่อันดับ (a, b) คือพิกัดบอกตำแหน่งในระนาบสองมิติ และนิยามการเท่ากันของคู่อันดับดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.3.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง กำหนดให้ (a, b) และ (c, d) เป็นคู่อันดับ จะกล่าวว่า

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = c \quad \text{และ} \quad b = d$$

ตัวอย่าง 4.3.2 ถ้า $(x - 1, y + 12) = (2y - 1, 3x + 2)$ จงหา x, y ที่สอดคล้องเงื่อนไขนี้

จากบทนิยามจะได้ว่า $x - 1 = 2y - 1$ และ $y + 12 = 3x + 2$ จะได้ว่า $x = 4$ และ $y = 2$

บทนิยาม 4.3.3 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)** นิยามโดย

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

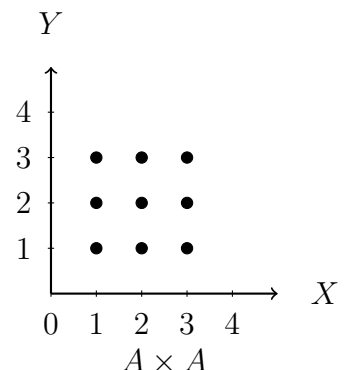
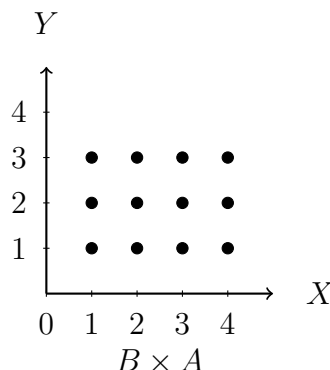
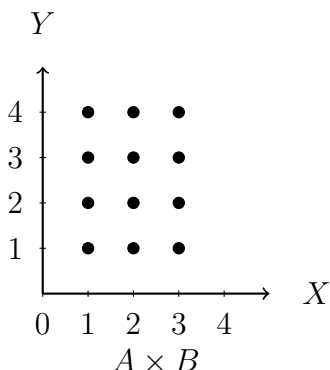
ข้อสังเกต $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

ข้อตกลง ถ้า A และ B เป็นสับเซตของจำนวนจริง แผนภาพ $A \times B$ เขียนโดยให้ A เป็นแกน X และ B เป็นแกน Y

ตัวอย่าง 4.3.4 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ จะได้ว่า

1. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
2. $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
3. $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

เขียนแผนภาพได้ดังนี้

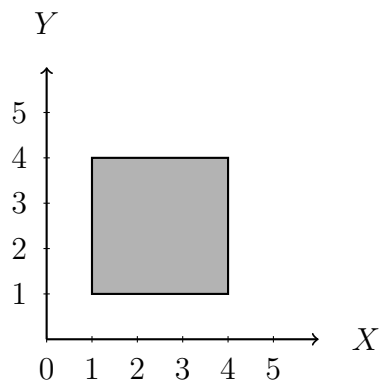


ทฤษฎีบท 4.3.5 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

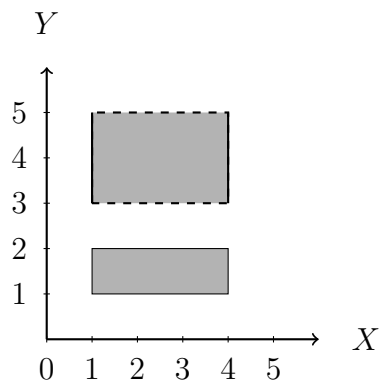
บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด □

ตัวอย่าง 4.3.6 ให้ $A = [1, 4]$ และ $B = [1, 2] \cup (3, 5)$ จงเขียนแผนภาพแทนเซตต่อไปนี้

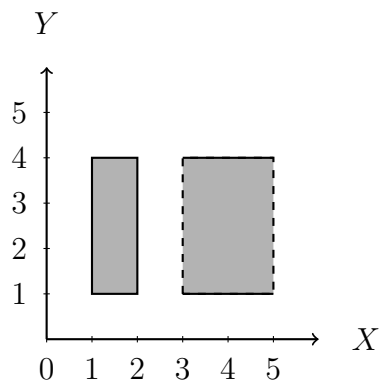
1. $A \times A$



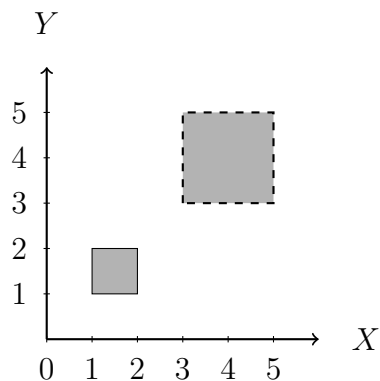
2. $A \times B$



3. $B \times A$



4. $B \times B$



ตัวอย่าง 4.3.7 จงแจกแจงสมาชิกและเขียนแผนภาพของ $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy = 3x + 12\}$

วิธีทำ สำหรับ x, y ที่เป็นจำนวนเต็ม จัดรูปสมการ $xy = 3x + 12$ จะได้ว่า

$$x(y - 3) = 12 \quad \text{ดังนั้น} \quad x = \frac{12}{y - 3}$$

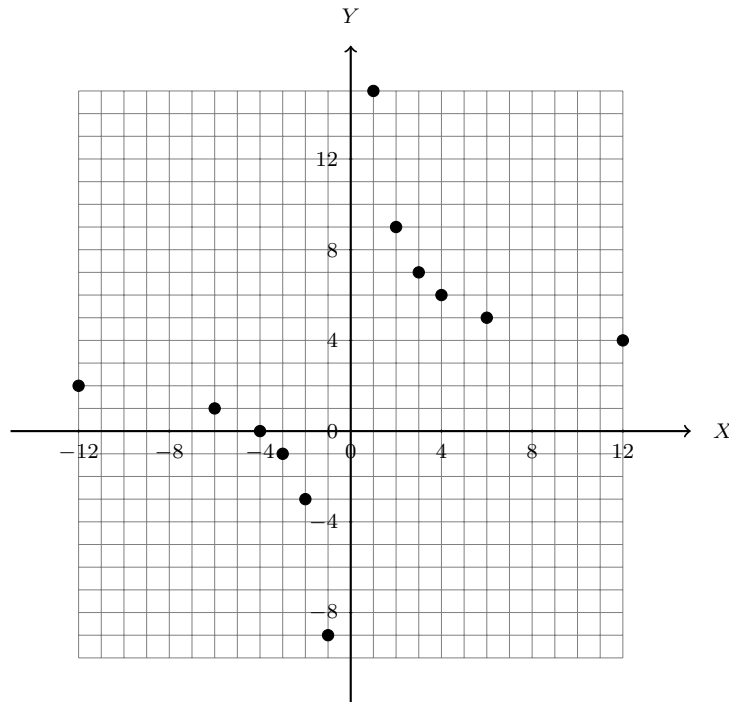
เนื่องจาก $x, y \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $(y - 3) \mid 12$ นั่นคือ

$$y - 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

สรุปได้ดังตาราง

x	-1	-2	-3	-4	-6	-12	12	6	4	3	2	1
y	-9	-3	-1	0	1	2	4	5	6	7	9	15

เขียนแทนด้วยกราฟต่อไปนี้



ตัวอย่าง 4.3.8 จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

$$1. A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid yx + y = x + 7\}$$

วิธีทำ สำหรับ x, y ที่เป็นจำนวนเต็ม จัดรูปสมการ $yx + y = x + 7$ จะได้ว่า

$$y(x + 1) = (x + 1) + 6 \quad \text{ดังนั้น} \quad y = 1 + \frac{6}{x + 1}$$

เนื่องจาก $x, y \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $(x + 1) \mid 6$ นั่นคือ $x + 1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ สรุปเป็นตารางได้ดังนี้

x	-7	-4	-3	-2	0	1	2	5
y	0	-1	-2	-5	7	4	3	2

$$\text{ดังนั้น } A = \{(-7, 0), (-4, -1), (-3, -2), (-2, -5), (0, 7), (1, 4), (2, 3), (5, 2)\}$$

$$2. A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 + x^2 - 2x + 4y + 5 = 0\}$$

วิธีทำ จัดรูปสมการ $y^2 + x^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ จะได้ว่า

$$(y^2 - 2y + 1) + (x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$(y - 1)^2 + (x + 2)^2 = 0$$

จากสมบัติจำนวนจริงจะได้ว่า $x = -2$ และ $y = 1$ ดังนั้น $A = \{(-2, 1)\}$

ตัวอย่าง 4.3.9 จงหาเงื่อนไขที่ $A \times B = B \times A$

วิธีทำ คำตอบคือ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$ หรือ $A = B$ ซึ่งคาดการณ์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$A \times B = B \times A \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad A = \emptyset \text{ หรือ } B = \emptyset \text{ หรือ } A = B$$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ สมมติ $A \times B = B \times A$ และ $A \neq \emptyset$ และ $B \neq \emptyset$ ให้ $x \in A$ เนื่องจาก $B \neq \emptyset$ จะมี $y \in B$ ซึ่ง $(x, y) \in A \times B$ เนื่องจาก $A \times B = B \times A$ ดังนั้น $(x, y) \in B \times A$ ทำให้ได้ว่า $x \in B$ สรุปได้ว่า $A \subseteq B$ สำหรับการพิสูจน์ $B \subseteq A$ ทำได้ในทำนองเดียวกัน สรุปได้ว่า $A = B$ ในทางกลับกัน ถ้า $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$ หรือ $A = B$ เห็นได้ชัดว่า $A \times B = B \times A$ $\square$

ตัวอย่าง 4.3.10 จงพิสูจน์ว่า "สำหรับเซต A และ B ใด ๆ $A \times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$ "

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ สมมติ $A \neq \emptyset$ และ $B \neq \emptyset$ โดยนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนจะได้ว่า $A \times B \neq \emptyset$ ในทางกลับกัน ถ้า $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$ เห็นได้ชัดว่า $A \times B = \emptyset$ $\square$

ตัวอย่าง 4.3.11 จะเห็นว่าข้อความ "สำหรับเซต A, B และ C ใด ๆ ถ้า $A \times B = A \times C$ แล้ว $B = C$ " เป็นเท็จโดยเลือกตัวอย่างค้านคือ $A = \emptyset, B = \emptyset$ และ $C = \{1\}$

ตัวอย่าง 4.3.12 ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \neq \emptyset$ และ $A \times B = A \times C$ แล้ว $B = C$

บทพิสูจน์. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ สมมติ $A \neq \emptyset$ และ $A \times B = A \times C$ ถ้า $B = \emptyset$ จะได้ว่า $A \times C = \emptyset$ เนื่องจาก $A \neq \emptyset$ ดังนั้น $C = \emptyset$ ดังนั้น $B = C$ สมมติว่า $B \neq \emptyset$ ให้ $y \in B$ เนื่องจาก $A \neq \emptyset$ จะมี $x \in A$ ซึ่ง $(x, y) \in A \times B$ เนื่องจาก $A \times B = A \times C$ ดังนั้น $(x, y) \in A \times C$ ทำให้ได้ว่า $y \in C$ สรุปได้ว่า $B \subseteq C$ สำหรับการพิสูจน์ $C \subseteq B$ ทำได้ในทำนองเดียวกัน สรุปได้ว่า $B = C$ $\square$

ตัวอย่าง 4.3.13 สำหรับเซต A, B และ C ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

บทพิสูจน์. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ $\square$

เราอาจจะขยายผลคูณคาร์ทีเซียนให้มากกว่าสองตัว เราจะเรียกผลคูณดังกล่าวว่าผลคูณตรง ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเซต **ผลคูณตรง (Direct product)** ของเซต $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เขียนแทนด้วย

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

และเราจะเขียน A^n แทน $\prod_{i=1}^n A_i$ และ $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ เมื่อ $A_i = \mathbb{R}$ ทุก ๆ i เรียกผลคูณ

ตรงนี้ว่าปริภูมิยูคลิด (Euclidean n -space) สำหรับ $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ เรียกว่า อันดับ n -tuple

ตัวอย่าง 4.3.14 กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ จะได้ว่า

$$A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2)\}$$

4.4 การจัดการเรียนรู้เรื่องเซต

เซตเป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ที่จะทำให้ผู้เรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ในระดับต่อไป หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เน้นหาจะเน้นไปที่ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์พื้นฐานในการเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้งสายที่เน้นวิทยาศาสตร์ และไม่เน้นวิทยาศาสตร์ ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
ม.4 ไม่เน้น วิทยาศาสตร์	1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเซต และตรรกศาสตร์เบื้องต้นในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์	เซต - ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์พื้นฐานเกี่ยวกับเซต - ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลีเมนต์ของเซต
ม.4 เน้น วิทยาศาสตร์	1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเซต ในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์	เซต - ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์พื้นฐานเกี่ยวกับเซต - ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลีเมนต์ของเซต

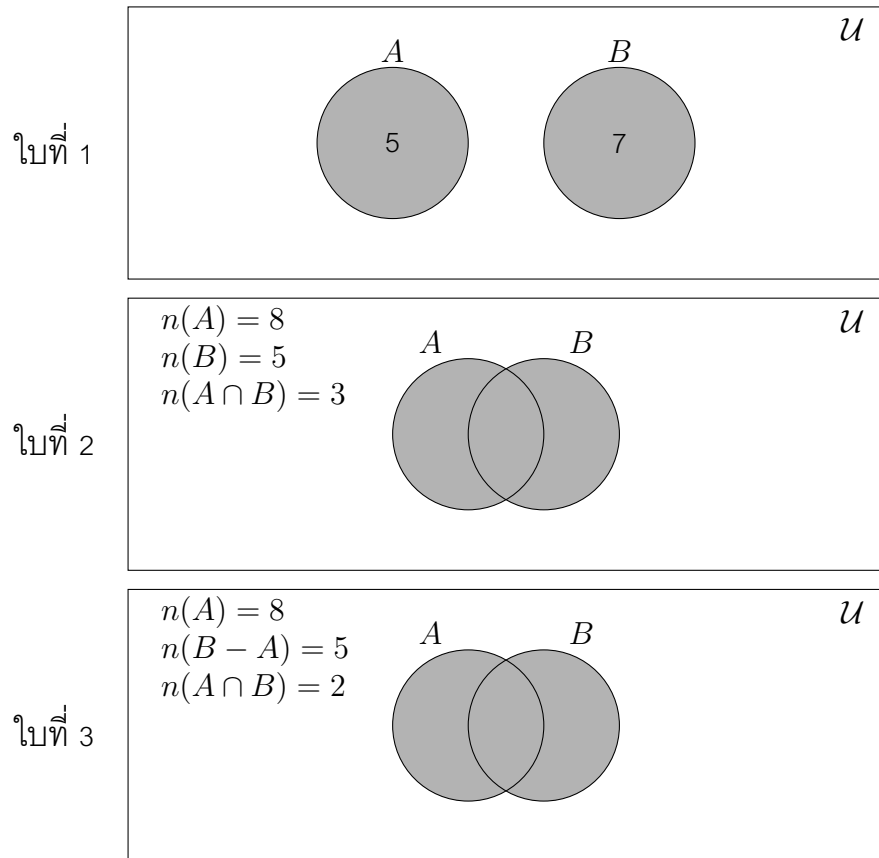
ตารางที่ 25 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางเรื่องเซต

ตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E

ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการสอนสาระการเรียนรู้ "การหาจำนวนสมาชิกของเซต" โดยเน้นการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อให้เกิดมโนทัศน์ และขยายไปสู่กรณีทั่วไปได้ในที่สุด ซึ่งทำได้ 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นสร้างความสนใจ

นำเข้าสู่บทเรียนโดยทบทวนการดำเนินการระหว่างเซต และเขียนแผนภาพเวนน์ออยเลอร์แทนการดำเนินการเหล่านั้น แล้วตั้งคำถามปลายเปิด เริ่มด้วยกิจกรรม "พื้นที่เท่าไร" โดยแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3 คน ให้นักเรียนหา $n(A \cup B)$ ตัวอย่างบัตรคำถามทั้ง 3 ใบ



2. ขั้นสำรวจค้นหา

แจกบัตรคำถามทั้งหมด 3 ใบแจกทีละใบให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม พอเสร็จใบแรก ใบที่สอง และใบที่สาม ใช้รวมเวลา 5 นาที ให้นักเรียนทำตามเวลาที่กำหนด (บัตรคำถามจะเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก) โดยครูผู้สอนจะคอยให้คำปรึกษาในขณะลงมือทำ

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

ให้แต่ละกลุ่มสรุปคำตอบ และออกมานำเสนอคำตอบที่ได้ แล้วนักเรียนในชั้นเรียนสรุปความคิดรวบยอดของการพิจารณาจากแผนภาพเวนน์โดยเน้นการหาสมาชิกของ 2 เซต สรุปได้ดังนี้

1. หลักการตัดออก $n(A) = n(U) - n(A^c)$
2. หลักการไม่ซ้อนทับ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ เมื่อ $A \cap B = \emptyset$
3. ยูเนียนสำหรับสองเซต $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

4. ขั้นขยายความรู้

ครูแสดงโจทย์ที่มี 3 เซต และตั้งคำถามที่ซับซ้อนมากขึ้น ให้นักเรียนช่วยกันตอบเพื่อให้ได้ข้อสรุปผลผนวกสำหรับสามเซตดังนี้

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

5. ขั้นประเมิน
ให้นักเรียนทำใบงานรายบุคคล

สรุป

เซตในทางคณิตศาสตร์ถือเป็นพื้นฐานที่สำคัญ เซตเป็นคำอธิบายแต่อธิบายง่าย ๆ ว่า เซตคือกลุ่มของสิ่งของซึ่งมีสมบัติบางประการคล้ายกัน การเขียนเซตมี 2 แบบคือ แบบแจกแจงสมาชิก และแบบบอกเงื่อนไขสมาชิก และเซตที่ไม่มีสมาชิกเลยเรียกว่าเซตว่าง เซตที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นสมาชิกของอีกเซตหนึ่งจะเรียกว่าสับเซตของเซตนั้น สำหรับเซตของสับเซตทั้งหมดของเซตที่สนใจเรียกว่าเซตกำลังของเซตนั้น การดำเนินการบนเซตมีดังนี้

1. ยูเนียน $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$
2. อินเตอร์เซกชัน $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$
3. ผลต่าง $A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$
4. ส่วนเติมเต็ม $A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$

ส่วนยูเนียนและอินเตอร์เซกชันใด ๆ มีดังนี้

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\} \quad \text{และ} \quad \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}$$

โดยเฉพาะกรณีที่เซตตรรกะนี้เป็นเซตของจำนวนนับ ได้ใช้หลักของอาร์คิมิดีสมาช่วยในการพิสูจน์ยูเนียนและอินเตอร์เซกชันเหล่านั้น จากนั้นกล่าวถึงผลคูณคาร์ทีเซียนซึ่งหมายถึงเซตของคู่อันดับระหว่างสองเซตและสมบัติเบื้องต้น และสุดท้ายเป็นตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เรื่องเซต โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E เรื่องการหาจำนวนสมาชิก ของเซต เพื่อเป็นตัวอย่างในการนำไปใช้จัดการเรียนรู้ในห้องเรียน

คำถามท้ายบท

1. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$1.1 \quad A - \emptyset = A$$

$$1.6 \quad U - A = A^c$$

$$1.11 \quad A \cup A^c = U$$

$$1.2 \quad \emptyset - A = \emptyset$$

$$1.7 \quad A \cup U = U$$

$$1.12 \quad A - B \subseteq A$$

$$1.3 \quad A \cup \emptyset = A$$

$$1.8 \quad A \cap U = A$$

$$1.13 \quad A \cap B \subseteq A$$

$$1.4 \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$1.9 \quad (A^c)^c = A$$

$$1.14 \quad B \subseteq A \cup B$$

$$1.5 \quad A - U = \emptyset$$

$$1.10 \quad A - A = \emptyset$$

$$1.15 \quad A \cap B \subseteq A \cup B$$

2. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$2.1 \quad A \cup (B - A) = A \cup B$$

$$2.3 \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$2.2 \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$2.4 \quad (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

3. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$3.1 \quad A \subseteq \emptyset \leftrightarrow A = \emptyset$$

$$3.6 \quad A \subseteq B \leftrightarrow A - B \subseteq B$$

$$3.2 \quad A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$$

$$3.7 \quad A = B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$$

$$3.3 \quad A \subseteq B^c \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

$$3.8 \quad A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

$$3.4 \quad A \subseteq B \leftrightarrow A^c \cup B = U$$

$$3.9 \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \leftrightarrow A \cup B \subseteq C$$

$$3.5 \quad A - B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq B$$

$$3.10 \quad (A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \leftrightarrow (A \cup B) \subseteq (C \cup D)$$

4. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

$$4.1 \quad \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$4.4 \quad \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$4.2 \quad \mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

$$4.5 \quad \mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$$

$$4.3 \quad \mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$4.6 \quad A \subseteq B \rightarrow \mathcal{P}(B^c) \subseteq \mathcal{P}(A^c)$$

5. จงหายูเนียน ๆ และอินเตอร์เซกชันใด ๆ ต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

$$5.1 \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

$$5.3 \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$5.2 \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$5.4 \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1, \frac{1}{n}\right)$$

$$5.5 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{n}, 1)$$

$$5.9 \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$$

$$5.6 \bigcup_{x \in \mathbb{R}^+} (-x, x)$$

$$5.10 \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$$

$$5.7 \bigcup_{x \in \mathbb{R}^+} (1 - x, 1 + x)$$

$$5.11 \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{n}, 1)$$

$$5.8 \bigcup_{y \in \mathbb{R}^+} (-\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$$

$$5.12 \bigcap_{x \in \mathbb{R}^+} (-x, x)$$

6. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนแผนภาพ

$$6.1 \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 5\}$$

$$6.2 \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y < 7\}$$

$$6.3 \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy = 12\}$$

$$6.4 \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy = 12\}$$

$$6.5 \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 2 = 0\}$$

7. ให้ A, B, C และ D เป็นเซต ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

$$7.1 (A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

$$7.2 A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$7.3 A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$7.4 (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$7.5 B \subseteq C \rightarrow A \times B \subseteq A \times C$$

$$7.6 A \times B = B \times A \rightarrow A = B$$

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- ชวลิต บุรพาศิริวัฒน์. (2538). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏจันทรเกษม.
- ชะเอม สายทอง. (2530). **ทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์.
- มานะ เอกจริยวงศ์. (2542). **ทฤษฎีเซต**. ลพบุรี: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ สถาบันราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์.
- F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. (2003). **Sets for Mathematics**. UK: Cambridge university press.
- Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014) **Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended)**. Marlestone, Australia : Haese& Harris Publications.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ความสัมพันธ์
2. ความสัมพันธ์สมมูล
3. การเรียงอันดับบางส่วน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจความสัมพันธ์ และพิสูจน์ข้อความเกี่ยวกับความสัมพันธ์ได้
2. พิสูจน์ความสัมพันธ์สมมูล และเขียนชั้นสมมูลได้
3. ตรวจสอบความสัมพันธ์ที่เป็นการเรียงอันดับบางส่วน และเขียนแผนภาพแฮชเช่ได้

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
- 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
- 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
- 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย
- 2.4 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
- 2.5 มอบหมายให้ทำ assignment เพื่อส่งท้ายคาบ

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "ความสัมพันธ์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "ความสัมพันธ์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในใบบันทึกผลงาน

บทที่ 5

ความสัมพันธ์

ในชีวิตประจำวันมีประโยคที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองอย่างอยู่บ่อยครั้ง เช่น "ศรีเรือนเป็นแม่ของศรีจันทร์" จากประโยคดังกล่าว "เป็นแม่" เป็นคำที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ศรีเรือนกับศรีจันทร์ ตัวอย่างในทางคณิตศาสตร์เช่น $5 < 7$ คำว่า "น้อยกว่า" เป็นคำที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง 5 กับ 7 ซึ่งก็คือ 5 น้อยกว่า 7 นั่นเอง ในบทนี้จะศึกษานิยามของความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์และสมบัติต่างๆ ของความสัมพันธ์เหล่านั้น

5.1 บทนิยามและตัวอย่างของความสัมพันธ์

บทนิยาม 5.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ความสัมพันธ์ (Relation) จาก A ไป B คือสับเซตของ $A \times B$ ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ $(a, b) \in r$ เขียนแทนด้วย $ar b$ และนิยาม

โดเมน (Domain) ของ r เขียนแทนด้วย $\text{Dom}(r)$ คือ $\text{Dom}(r) = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a, b) \in r\}$

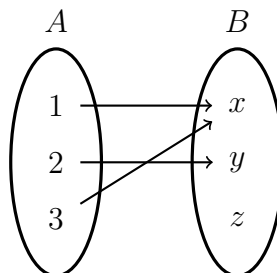
เรนจ์ (Range) ของ r เขียนแทนด้วย $\text{Ran}(r)$ คือ $\text{Ran}(r) = \{b \in B \mid \exists a \in A, (a, b) \in r\}$

ในกรณีที่ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A จะเรียก r ว่า ความสัมพันธ์บน A

ข้อสังเกต $\text{Dom}(r) \subseteq A$ และ $\text{Ran}(r) \subseteq B$

ตัวอย่าง 5.1.2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{x, y, z\}$

กำหนดให้ $r = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



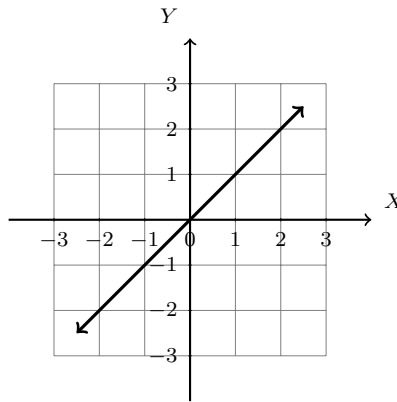
รูปที่ 12 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ $r = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$

วิธีทำ จากแผนภาพจะได้ว่า $\text{Dom}(r) = \{1, 2, 3\}$ และ $\text{Ran}(r) = \{x, y\}$

ตัวอย่าง 5.1.3 จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ในรูปเซต พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

1. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ xry มีความหมายว่า $x = y$

วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $y = x$

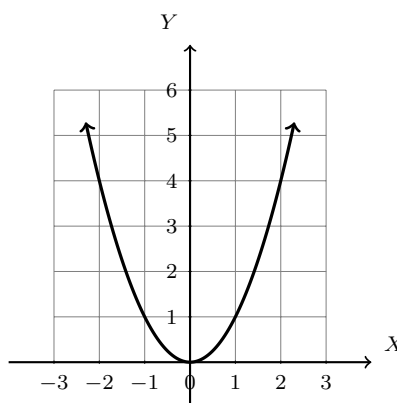
ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$ หรือ $r = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}$ ซึ่งมี $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = \mathbb{R}$ เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า "ความสัมพันธ์เอกลักษณ์บน $\mathbb{R}$ " นิยามทั่วไปคือ

$$i_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

เมื่อ $A \neq \emptyset$ เรียก i_A ว่า ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ (Identity relation) บน A

2. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ xry มีความหมายว่า $y = x^2$

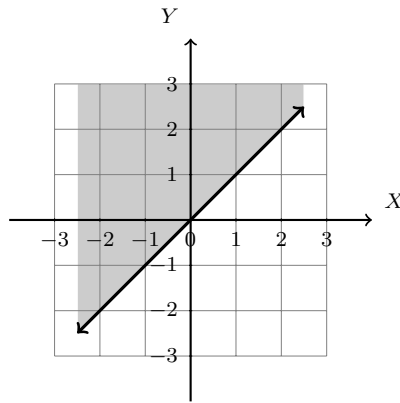
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $y = x^2$

ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ และมี $\text{Dom}(r) = \mathbb{R}$ และ $\text{Ran}(r) = [0, \infty)$

3. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $x r y$ มีความหมายว่า $x < y$
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

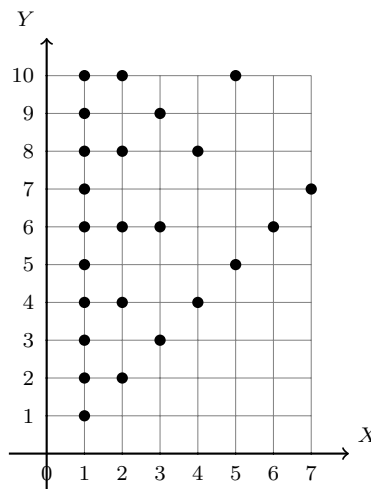


รูปที่ 15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $x < y$

ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$ และมี $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = \mathbb{R}$
 เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า "น้อยกว่า" บน $\mathbb{R}$ เขียนแทนด้วย "<"

ตัวอย่าง 5.1.4 จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ในรูปเซต พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

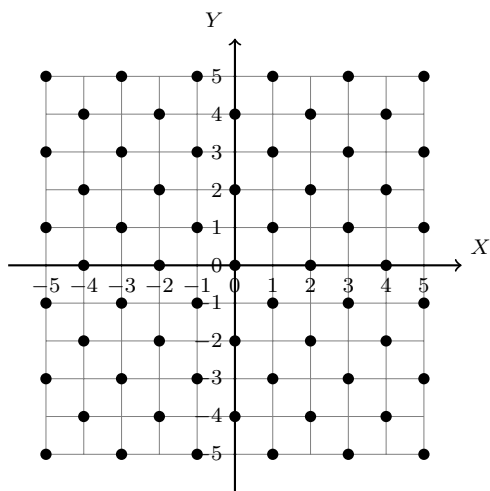
1. ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $x r y$ มีความหมายว่า $x \mid y$
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $x \mid y$

ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \mid y\}$ และมี $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = \mathbb{N}$
 เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า "หารลงตัว" บน $\mathbb{N}$ เขียนแทนด้วย "|"

2. ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ $x r y$ มีความหมายว่า $2 \mid (x - y)$
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $2 \mid (x - y)$

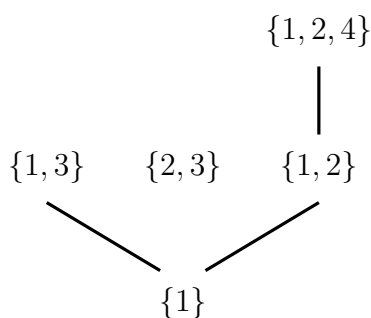
ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2 \mid (x - y)\}$ และมี $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = \mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 5.1.5 กำหนดให้ $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$ สำหรับ $X, Y \in A$ นิยาม

$X r Y$ มีความหมายว่า $X \subseteq Y$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ เขียนเป็นแผนภาพเฮสเซ (ดูในหัวข้อ 5.3) ได้ดังนี้



ดังนั้น $r = \{(X, Y) \in A \times A \mid X \subseteq Y\}$ ซึ่งมี $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$
 ในกรณีสำหรับเซต S และ $X, Y \in \mathcal{P}(S)$ นิยาม $X r Y$ มีความหมายว่า $X \subseteq Y$ แล้ว

$r = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \mid X \subseteq Y\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathcal{P}(S)$

จะได้ว่า $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = \mathcal{P}(S)$

ตัวอย่าง 5.1.6 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r เมื่อ A เป็นเซตของเส้นตรงในระนาบสองมิติ และ $\ell_1, \ell_2 \in A$

$$\ell_1 r \ell_2 \quad \text{มีความหมายว่า} \quad \ell_1 \text{ ขนานกับ } \ell_2$$

วิธีทำ ดังนั้น $r = \{(\ell_1, \ell_2) \in A \times A \mid \ell_1 \text{ ขนานกับ } \ell_2\}$ เป็นความสัมพันธ์บน A มี $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = A$

ตัวอย่าง 5.1.7 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r เมื่อ A เป็นเซตของประพจน์ และ $p, q \in A$ กำหนดให้

$$p r q \quad \text{มีความหมายว่า} \quad p \rightarrow q \quad \text{เป็นสัจนิรันดร์}$$

วิธีทำ ดังนั้น $r = \{(p, q) \in A \times A \mid p \rightarrow q \text{ เป็นสัจนิรันดร์}\}$ เป็นความสัมพันธ์บน A

ดังนั้น $\text{Dom}(r) = \text{Ran}(r) = A$

ตัวอย่าง 5.1.8 ให้ $A = \{1, 2\}$ จงหาทุกความสัมพันธ์บน A

วิธีทำ นั่นคือหาสับเซตทั้งหมดของ $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

$$r_1 = \emptyset$$

$$r_9 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

$$r_2 = \{(1, 1)\}$$

$$r_{10} = \{(1, 2), (2, 2)\}$$

$$r_3 = \{(1, 2)\}$$

$$r_{11} = \{(2, 1), (2, 2)\}$$

$$r_4 = \{(2, 1)\}$$

$$r_{12} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$r_5 = \{(2, 2)\}$$

$$r_{13} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

$$r_6 = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

$$r_{14} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$r_7 = \{(1, 1), (2, 1)\}$$

$$r_{15} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$r_8 = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

$$r_{16} = A \times A$$

เรียก $\emptyset$ ว่าความสัมพันธ์ว่าง (Empty relation) และเรียก $A \times A$ ว่าความสัมพันธ์เอกภาพ (Universal relation) เมื่อ $A \neq \emptyset$ จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดคำนวณได้จาก

$$2^{n(A \times A)} = 2^4 = 16$$

โดยทฤษฎีบท 4.1.8 เพราะความสัมพันธ์บน A คือสับเซตของ $A \times A$ และใช้ทฤษฎีบท 4.3.5 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

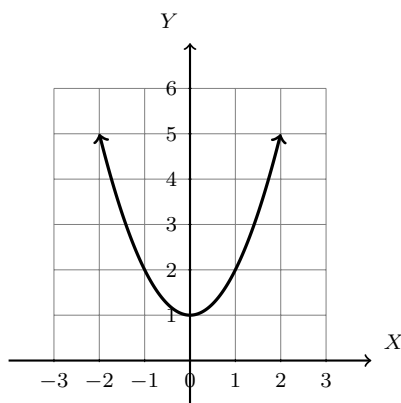
ทฤษฎีบท 5.1.9 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด แล้วจำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A) \cdot n(B)}$

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด



ตัวอย่าง 5.1.10 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r พร้อมทั้งพิสูจน์

วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 18 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $y = x^2 + 1$

จากกราฟจะได้ว่า $\text{Dom}(r) = \mathbb{R}$ และ $\text{Ran}(r) = [1, \infty)$

บทพิสูจน์. จะแสดงโดยบทนิยามที่ว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

1. $\text{Dom}(r) = \mathbb{R}$

เห็นได้ชัดว่า $\text{Dom}(r) \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ เลือก $y = 1 + x^2$ ดังนั้น $y \in \mathbb{R}$ นั่นคือ $(x, y) \in r$ เพราะฉะนั้น $x \in \text{Dom}(r)$ นั่นคือ $\mathbb{R} \subseteq \text{Dom}(r)$ สรุปได้ว่า $\text{Dom}(r) = \mathbb{R}$

2. $\text{Ran}(r) = [1, \infty)$

ให้ $y \in \text{Ran}(r)$ จะมี $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $y = 1 + x^2$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ y = 1 + x^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y \in [1, \infty)$ เพราะฉะนั้น $\text{Ran}(r) \subseteq [1, \infty)$ ในทางกลับกันให้ $y \geq 1$ แล้ว $y - 1 \geq 0$ เลือก $x = \sqrt{y - 1}$ ดังนั้น $x \in \mathbb{R}$ และ $x^2 = y - 1$ แล้ว

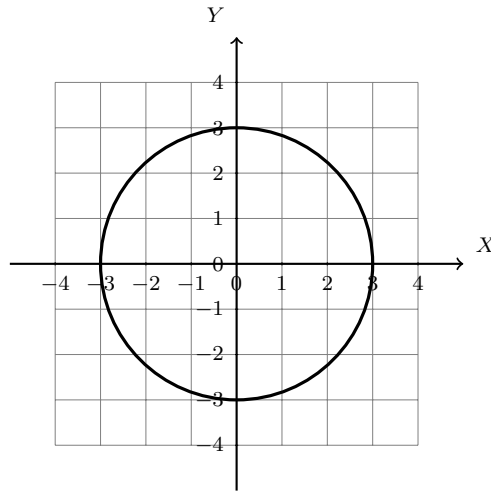
$$y = x^2 + 1$$

นั่นคือ $(x, y) \in r$ จึงได้ว่า $y \in \text{Ran}(r)$ เพราะฉะนั้น $[1, \infty) \subseteq \text{Ran}(r)$ สรุปได้ว่า $\text{Ran}(r) = [1, \infty)$

□

ตัวอย่าง 5.1.11 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r พร้อมทั้งพิสูจน์

วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = 9$

จากกราฟจะได้ว่า $\text{Dom}(r) = [-3, 3]$ และ $\text{Ran}(r) = [-3, 3]$

บทพิสูจน์. จะแสดงว่า $\text{Dom}(r) = [-3, 3]$ และ $\text{Ran}(r) = [-3, 3]$

1. $\text{Dom}(r) = [-3, 3]$

ให้ $x \in \text{Dom}(r)$ จะได้ว่ามี $y \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x^2 + y^2 = 9$ แล้ว $9 - x^2 = y^2 \geq 0$ ดังนั้น

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

$$(x - 3)(x + 3) \leq 0$$

ทำให้ได้ว่า $x \in [-3, 3]$ นั่นคือ $\text{Dom}(r) \subseteq [-3, 3]$ ในทางกลับกันให้ $x \in [-3, 3]$ แล้ว

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$0 \leq x^2 \leq 9$$

$$\therefore 9 - x^2 \geq 0$$

เลือก $y = \sqrt{9 - x^2}$ ดังนั้น $y \in \mathbb{R}$ และ $x^2 + y^2 = 9$ ทำให้ได้ว่า $(x, y) \in r$ เพราะฉะนั้น $x \in \text{Dom}(r)$

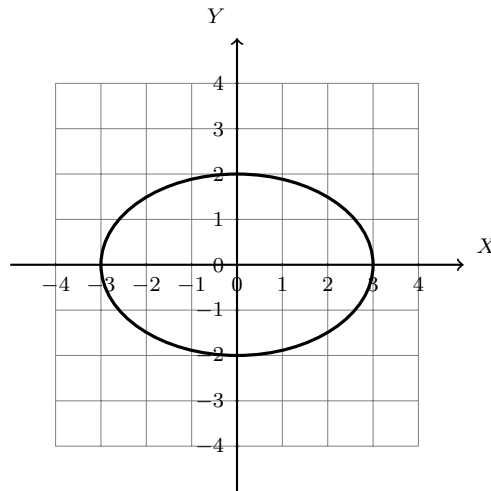
นั่นคือ $[-3, 3] \subseteq \text{Dom}(r)$ สรุปได้ว่า $\text{Dom}(r) = [-3, 3]$

2. $\text{Ran}(r) = [-3, 3]$ ทำเป็นแบบฝึกหัด



ตัวอย่าง 5.1.12 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r พร้อมทั้งพิสูจน์

วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 20 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $4x^2 + 9y^2 = 36$

จากกราฟจะได้ว่า $\text{Dom}(r) = [-3, 3]$ และ $\text{Ran}(r) = [-2, 2]$

บทพิสูจน์. จะแสดงว่า $\text{Dom}(r) = [-3, 3]$ และ $\text{Ran}(r) = [-2, 2]$

1. $\text{Ran}(r) = [-2, 2]$

ให้ $y \in \text{Ran}(r)$ จะได้ว่ามี $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $4x^2 + 9y^2 = 36$ แล้ว $36 - 9y^2 = 4x^2 \geq 0$ ดังนั้น

$$36 - 9y^2 \geq 0$$

$$y^2 - 4 \leq 0$$

$$(y - 2)(y + 2) \leq 0$$

ทำให้ได้ว่า $y \in [-2, 2]$ นั่นคือ $\text{Ran}(r) \subseteq [-2, 2]$ ในทางกลับกันให้ $y \in [-2, 2]$ แล้ว

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$0 \leq y^2 \leq 4$$

$$0 \leq 9y^2 \leq 36$$

$$\therefore 36 - 9y^2 \geq 0$$

เลือก $x = \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9y^2}$ ดังนั้น $x \in \mathbb{R}$ และ

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9y^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(36 - 9y^2)$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

ทำให้ได้ว่า $(x, y) \in r$ เพราะฉะนั้น $y \in \text{Ran}(r)$ นั่นคือ $[-2, 2] \subseteq \text{Ran}(r)$ สรุปได้ว่า $\text{Ran}(r) = [-2, 2]$

2. $\text{Dom}(r) = [-3, 3]$ ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

ตัวอย่าง 5.1.13 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงแสดงว่า

$$\text{Dom}(r \cup s) \subseteq \text{Dom}(r) \cup \text{Dom}(s)$$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \text{Dom}(r \cup s)$ จะได้ว่ามี $y \in B$ ซึ่ง $(x, y) \in r \cup s$ ดังนั้น $(x, y) \in r$ หรือ $(x, y) \in s$ ทำให้ได้ว่า $x \in \text{Dom}(r)$ หรือ $x \in \text{Dom}(s)$ นั่นคือ $x \in \text{Dom}(r) \cup \text{Dom}(s)$ □

ตัวอย่าง 5.1.14 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงแสดงว่า

$$\text{Ran}(r \cup s) \subseteq \text{Ran}(r) \cup \text{Ran}(s)$$

บทพิสูจน์. ให้ $y \in \text{Ran}(r \cup s)$ จะได้ว่ามี $x \in A$ ซึ่ง $(x, y) \in r \cup s$ ดังนั้น $(x, y) \in r$ หรือ $(x, y) \in s$ ทำให้ได้ว่า $y \in \text{Ran}(r)$ หรือ $y \in \text{Ran}(s)$ นั่นคือ $y \in \text{Ran}(r) \cup \text{Ran}(s)$ □

บทนิยาม 5.1.15 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse relation) ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} คือความสัมพันธ์จาก B ไป A กำหนดให้ $x r^{-1} y$ ก็ต่อเมื่อ $y r x$ เขียนในรูปเซตได้ดังนี้

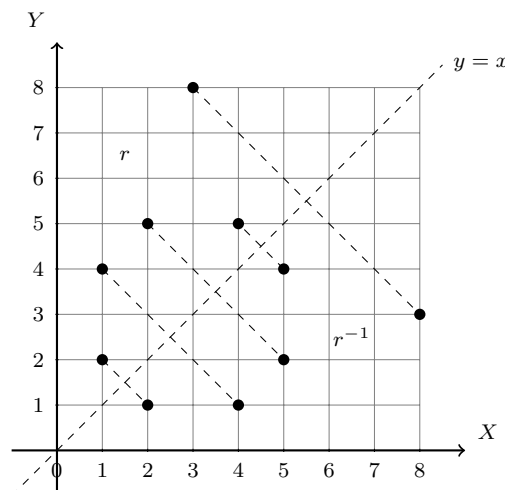
$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in r\}$$

ข้อสังเกต $\text{Dom}(r^{-1}) = \text{Ran}(r)$ และ $\text{Ran}(r^{-1}) = \text{Dom}(r)$

ตัวอย่าง 5.1.16 ความสัมพันธ์ผกผันของ $r = \{(1, 2), (1, 4), (2, 5), (4, 5), (3, 8)\}$ คือ

$$r^{-1} = \{(2, 1), (4, 1), (5, 2), (5, 4), (8, 3)\}$$

เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



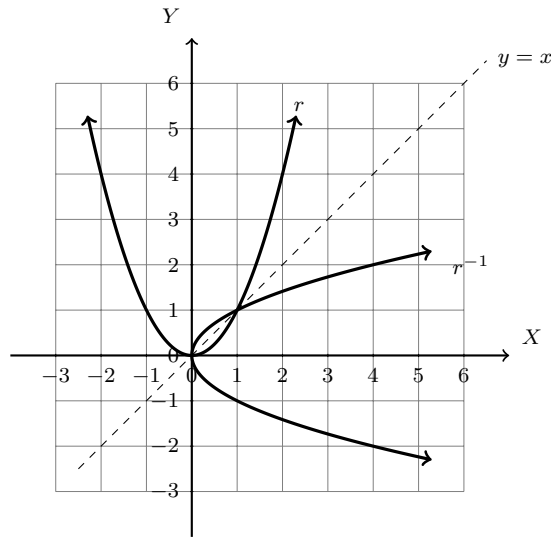
รูปที่ 21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ r และ r^{-1} เมื่อ $r = \{(1, 2), (1, 4), (2, 5), (4, 5), (3, 8)\}$

จากกราฟจะเห็นได้ว่า r และ r^{-1} มีความสัมพันธ์เอกลักษณ์เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่าง 5.1.17 จงหา r^{-1} พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์

1. ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

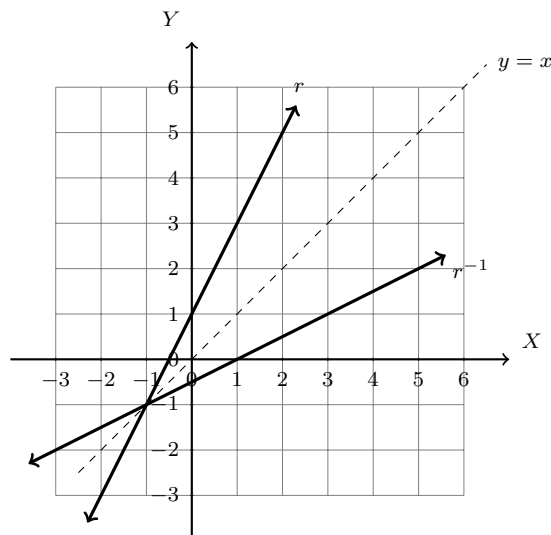
วิธีทำ จะได้ว่า $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 22 กราฟแสดงความสัมพันธ์ r และ r^{-1} เมื่อ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

2. ให้ $x r y$ ก็ต่อเมื่อ $y = 2x + 1$ สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}$

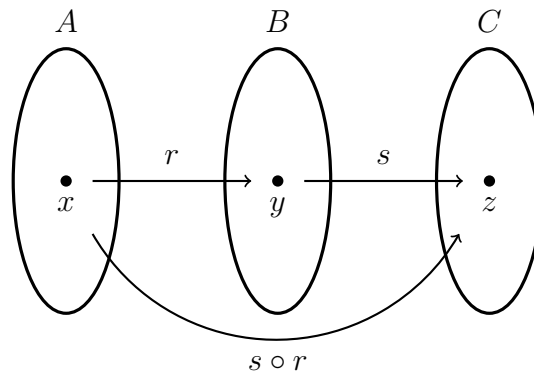
วิธีทำ จะได้ว่า $x r^{-1} y$ ก็ต่อเมื่อ $x = 2y + 1$ เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 23 กราฟแสดงความสัมพันธ์ r และ r^{-1} เมื่อ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$

บทนิยาม 5.1.18 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C ความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s (r composed with s) จะเขียนแทนด้วย $s \circ r$ คือความสัมพันธ์จาก A ไป C กำหนดโดย

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B, (x, y) \in r \wedge (y, z) \in s\}$$



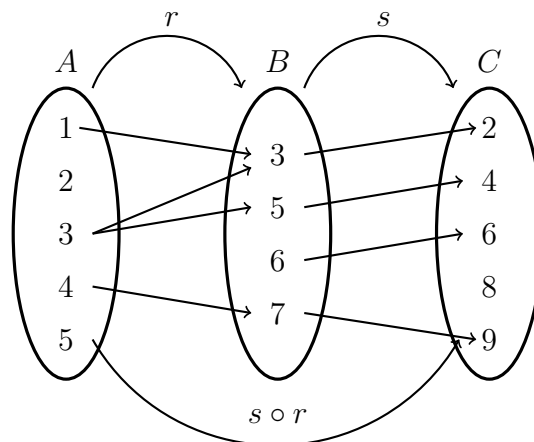
รูปที่ 24 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s

ตัวอย่าง 5.1.19 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6, 7\}$ และ $C = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C ดังนี้

$$r = \{(1, 3), (3, 3), (3, 5), (4, 7)\} \text{ และ } s = \{(3, 2), (5, 4), (6, 6), (7, 9)\}$$

จงหา $s \circ r$

วิธีทำ เขียนแผนภาพได้ดังนี้



รูปที่ 25 แผนภาพตัวอย่างแสดงความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s

ดังนั้น $s \circ r = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 9)\}$

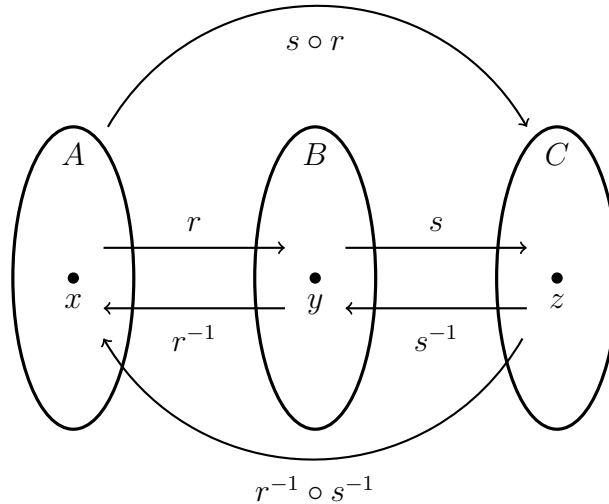
ตัวอย่าง 5.1.20 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ โดย r และ s เป็นความสัมพันธ์บนเซต A ดังนี้

$r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ และ $s = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 3)\}$ จะได้ว่า

1. $r \circ s = \{(1, 3), (2, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 4)\}$
2. $s \circ r = \{(1, 5), (2, 4), (3, 1), (4, 3), (5, 2)\}$
3. $(s \circ r)^{-1} = \{(5, 1), (4, 2), (1, 3), (3, 4), (2, 5)\}$
4. $s^{-1} \circ r^{-1} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 5), (5, 3)\}$
5. $r^{-1} \circ s^{-1} = \{(5, 1), (4, 2), (1, 3), (3, 4), (2, 5)\}$

จากตัวอย่างนี้สรุปได้ว่า $s \circ r \neq r \circ s$ และ $(s \circ r)^{-1} \neq s^{-1} \circ r^{-1}$

ตัวอย่าง 5.1.21 ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ ให้ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C แล้ว $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$



รูปที่ 26 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ $(s \circ r)^{-1}$ และ $r^{-1} \circ s^{-1}$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in A$ และ $z \in C$ แล้ว

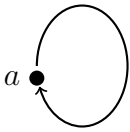
$$\begin{aligned}
 (z, x) \in (s \circ r)^{-1} &\leftrightarrow (x, z) \in s \circ r \\
 &\leftrightarrow \exists y \in B, (x, y) \in r \wedge (y, z) \in s \\
 &\leftrightarrow \exists y \in B, (y, x) \in r^{-1} \wedge (z, y) \in s^{-1} \\
 &\leftrightarrow (z, x) \in r^{-1} \circ s^{-1}
 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$

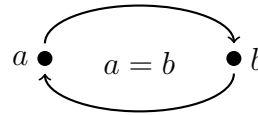


บทนิยาม 5.1.22 ให้ A เป็นเซตใดๆ และ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะกล่าวว่า r มีสมบัติ

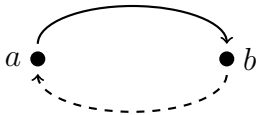
- | | | |
|------------------------------|------------|---|
| 1. สะท้อน (Reflexive) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a \in A, \quad a r a$ |
| 2. สมมาตร (Symmetric) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b \in A, \quad a r b \rightarrow b r a$ |
| 3. ปฏิสมมาตร (Antisymmetric) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b \in A, \quad (a r b \wedge b r a) \rightarrow a = b$ |
| 4. ถ่ายทอด (Transitive) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b, c \in A, \quad (a r b \wedge b r c) \rightarrow a r c$ |



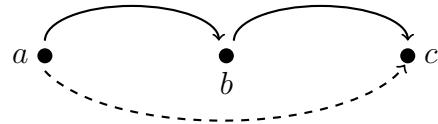
สมบัติสะท้อน



สมบัติปฏิสมมาตร



สมบัติสมมาตร



สมบัติถ่ายทอด

รูปที่ 27 แผนภาพแสดงสมบัติของความสัมพันธ์

ตัวอย่าง 5.1.23 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีสมบัติใดบ้าง

1. r คือความสัมพันธ์ว่าง
จะได้ว่า $r = \emptyset$
2. r คือความสัมพันธ์เอกลักษณ์บน A
จะได้ว่า $r = i_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3. r คือความสัมพันธ์ "น้อยกว่า" บน A
จะได้ว่า $r = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
4. r คือความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" บน A
จะได้ว่า $r = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
5. r คือความสัมพันธ์ "หารลงตัว" บน A
จะได้ว่า $r = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$
6. r คือความสัมพันธ์เอกภาพ บน A
จะได้ว่า $r = A \times A$

สรุปสมบัติแต่ละความสัมพันธ์มีสมบัติดังตาราง

ความสัมพันธ์/สมบัติ	สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด
ความสัมพันธ์ว่าง	×	✓	✓	✓
ความสัมพันธ์เอกลักษณ์	✓	✓	✓	✓
ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"	×	×	×	✓
ความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ"	✓	×	✓	✓
ความสัมพันธ์ "หารลงตัว"	✓	×	✓	✓
ความสัมพันธ์เอกภาพ	✓	✓	×	✓

ตารางที่ 26 สรุปสมบัติความสัมพันธ์

ตัวอย่าง 5.1.24 จงแสดงว่าความสัมพันธ์ "หารลงตัว" บน $\mathbb{N}$ มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด แต่ไม่มีสมบัติสมมาตร

1. สมบัติสะท้อน

เนื่องจาก $x \mid x$ ทุกๆ $x \in \mathbb{N}$

2. เนื่องจาก $1 \mid 2$ แต่ $2 \nmid 1$ ดังนั้นความสัมพันธ์ "หารลงตัว" บน $\mathbb{N}$ ไม่มีสมบัติสมมาตร

3. สมบัติปฏิสมมาตร

ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ สมมติ $x \mid y$ และ $y \mid x$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ k, p ซึ่ง $y = kx$ และ $x = py$ แล้ว

$$y = k(py)$$

$$y(1 - kp) = 0$$

เนื่องจาก $y \neq 0$ ดังนั้น $1 - kp = 0$ นั่นคือ $kp = 1$ เนื่องจาก $k, p \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $k = p = 1$ สรุปได้ว่า $x = y$

4. สมบัติถ่ายทอด

ให้ $x, y, z \in \mathbb{N}$ สมมติ $x \mid y$ และ $y \mid z$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ k, p ซึ่ง $y = kx$ และ $z = py$ แล้ว

$$z = p(kx) = (pk)x$$

ดังนั้น $x \mid z$

ตัวอย่าง 5.1.25 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = |x|\}$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{R}$ มีสมบัติใดบ้างพร้อมทั้งพิสูจน์

1. เนื่องจาก $-1 \neq |-1|$ ดังนั้น $(-1, -1) \notin r$ สรุปได้ว่า r ไม่มีสมบัติสะท้อน

2. เนื่องจาก $1 = |-1|$ และ $-1 \neq |1|$ ดังนั้น $(-1, 1) \in r$ แต่ $(1, -1) \notin r$ สรุป r ไม่มีสมบัติสมมาตร

3. สมบัติปฏิสมมาตร

ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ สมมติ xry และ yrx จะได้ว่า $y = |x|$ และ $x = |y|$ แล้ว

$$y = ||y|| = |y| = x$$

4. สมบัติถ่ายทอด

ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ สมมติ xry และ yrz จะได้ว่า $y = |x|$ และ $z = |y|$ แล้ว

$$z = ||x|| = |x|$$

ดังนั้น xrz

ตัวอย่าง 5.1.26 ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ xry ก็ต่อเมื่อ $3|(y-x)$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Z}$ มีสมบัติใดบ้างพร้อมทั้งพิสูจน์

1. เนื่องจาก $3|(x-x)$ ทุกๆ $x \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น r มีสมบัติสะท้อน
2. สำหรับทุกจำนวนเต็ม x, y ถ้า $3|(y-x)$ แล้ว $3|(x-y)$ ดังนั้น r มีสมบัติสมมาตร
3. เนื่องจาก $3|(4-1)$ และ $3|(1-4)$ แต่ $1 \neq 4$ ดังนั้น r ไม่มีสมบัติปฏิสมมาตร
4. สมบัติถ่ายทอด
ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ สมมติ xry และ yrz จะได้ว่า $3|(y-x)$ และ $3|(z-y)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k, p ซึ่ง $y-x = 3k$ และ $z-y = 3p$ แล้ว

$$z-x = (z-y) + (y-x) = 3k + 3p = 3(k+p)$$

ดังนั้น $3|(z-x)$ สรุปได้ว่า xrz

ทฤษฎีบท 5.1.27 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A เมื่อ $A \neq \emptyset$ แล้วจะได้ว่า

1. r มีสมบัติสะท้อน ก็ต่อเมื่อ $i_A \subseteq r$
2. r มีสมบัติสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $r = r^{-1}$
3. r มีสมบัติปฏิสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $r \cap r^{-1} \subseteq i_A$
4. r มีสมบัติถ่ายทอด ก็ต่อเมื่อ $r \circ r \subseteq r$

บทพิสูจน์. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A

1. สมมติ r มีสมบัติสะท้อน ให้ $(x, y) \in i_A$ จะได้ว่า $x = y$ เนื่องจาก r มีสมบัติสะท้อน จะได้ว่า $(x, y) \in r$ ดังนั้น $i_A \subseteq r$ ในทางกลับกันสมมติว่า $i_A \subseteq r$ ให้ $a \in A$ จะได้ว่า $(a, a) \in i_A$ เนื่องจาก $i_A \subseteq r$ ดังนั้น $(a, a) \in r$ สรุปได้ว่า r มีสมบัติสะท้อน

2-4 เป็นแบบฝึกหัด



5.2 ความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 5.2.1 ความสัมพันธ์ r บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์สมมูล** (Equivalent relation) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่าง 5.2.2 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

1. $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A
2. $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ ไม่เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A เพราะไม่มีสมบัติสะท้อนและสมมาตร
3. $r = \{(1, 1)\}$ ไม่เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A เพราะไม่มีสมบัติสะท้อน
4. $r = A \times A$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A
5. $r = \emptyset$ ไม่เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A เพราะไม่มีสมบัติสะท้อน

ตัวอย่าง 5.2.3 ความสัมพันธ์ r ที่นิยามโดย

$$x r y \text{ ก็ต่อเมื่อ } 3 \mid (y - x) \quad \text{สำหรับ } x, y \in \mathbb{Z}$$

เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$ โดยตัวอย่าง 5.1.26

จากตัวอย่างนี้สามารถขยายแนวคิดจาก 3 ไปเป็นจำนวนเต็ม $n > 1$ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.2.4 ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n > 1$ และความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Z}$ นิยามโดย

$$x r y \text{ ก็ต่อเมื่อ } n \mid (y - x)$$

จงแสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n > 1$

1. เนื่องจาก $n \mid (x - x)$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น r มีสมบัติสะท้อน
2. สำหรับทุกจำนวนเต็ม x, y ถ้า $n \mid (y - x)$ แล้ว $n \mid (x - y)$ ดังนั้น r มีสมบัติสมมาตร
3. ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ สมมติ $x r y$ และ $y r z$ จะได้ว่า $n \mid (y - x)$ และ $n \mid (z - y)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k, p ซึ่ง $y - x = nk$ และ $z - y = np$ แล้ว

$$z - x = (z - y) + (y - x) = nk + np = n(k + p)$$

ดังนั้น $n \mid (z - x)$ สรุปได้ว่า $x r z$ ทำให้ได้ว่า r มีสมบัติถ่ายทอด

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$



บทนิยาม 5.2.5 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $A \neq \emptyset$ และ $a \in A$ **ชั้นสมมูล** (Equivalence class) ของ a มอดุโล r เขียนแทนด้วย $[a]_r$ หรือ $[a]$ หรือ $\bar{a}$ หมายถึงเซตของสมาชิกใน A ที่สัมพันธ์กับ a นั่นคือ

$$[a]_r = \{x \in A \mid x r a\}$$

และเซตของชั้นสมมูลเรียกว่า **เซต A มอดุโล r** (A modulo r) เขียนแทนด้วย A/r ดังนั้น

$$A/r = \{[a]_r \mid a \in A\}$$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาเซต $\mathbb{Z}/r$ ของความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Z}$ โดย $x r y$ ก็ต่อเมื่อ $3 \mid (x - y)$ ในตัวอย่าง 5.1.26 **วิธีทำ** จะได้ว่า

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x r a\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid (a - x)\}$$

$$[-3] = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid (-3 - x)\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[-2] = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid (-2 - x)\} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[-1] = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid (-1 - x)\} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

$$[0] = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid (0 - x)\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid (1 - x)\} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid (2 - x)\} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

$$[3] = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid (0 - 3)\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

จะได้ว่า $[0] = [3k]$, $[1] = [3k + 1]$ และ $[2] = [3k + 2]$ ทุกจำนวนเต็ม k ดังนั้น

$$\mathbb{Z}/r = \{[0], [1], [2]\}$$

เมื่อ $[0]$, $[1]$ และ $[2]$ หมายถึงเซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 เหลือเศษเท่ากับ 0, 1 และ 2 ตามลำดับ

[1]	[2]	[0]
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-5	-4	-3
-2	-1	0
1	2	3
4	5	6
7	8	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 27 ผลการแบ่งกันจำนวนเต็มออกเป็น 3 ส่วน

สังเกตได้ว่าเซต $\mathbb{Z}$ ถูกแบ่งออกเป็นเซตย่อยได้ 3 เซตเท่านั้นคือ $[0]$, $[1]$ และ $[2]$ จะเห็นว่าแต่ละเซตย่อยไม่มีสมาชิกซ้ำกัน และเมื่อรวมสมาชิกทั้งหมดของเซตย่อยเหล่านั้นย่อมเท่ากับ $\mathbb{Z}$

ในทำนองเดียวกันจากตัวอย่าง 5.2.4 เมื่อ $[k] = \{nq + k \mid q \in \mathbb{Z}\}$ ทุก $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ จะได้ว่า

$$\mathbb{Z}/r = \{[0], [1], [3], \dots, [n-1]\}$$

เรียกเซตนี้ว่า **เซตของจำนวนเต็มมอดุโล n** (The set of integer modulo n) เขียนแทนด้วย $\mathbb{Z}_n$

ตัวอย่าง 5.2.7 พิจารณา i_A เป็นความสัมพันธ์เอกลักษณ์ บน A เมื่อ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ จงหา $\mathbb{R}/i_A$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$[a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a\}$$

จะเห็นได้ว่า $[-1] = \{-1\}$, $[2] = \{2\}$, $[1.2] = \{1.2\}$ นั่นคือชั้นสมมูลแต่ละชั้นมีสมาชิกเพียงตัวเดียวคือจำนวนนั้น ดังนั้น $[a] = \{a\}$ สรุปได้ว่า

$$\mathbb{R}/i_A = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

ตัวอย่าง 5.2.8 พิจารณาความสัมพันธ์เอกภาพ $r = A \times A$ บน $A \neq \emptyset$ จงหา $A/A \times A$ จะได้ว่า

$$[a] = \{x \in A \mid (x, a) \in A \times A\}$$

เห็นได้ว่าไม่ว่า a จะเป็นสมาชิกใดใน A จะได้ว่า $[a] = A$ ดังนั้น

$$A/A \times A = \{A\}$$

ทฤษฎีบท 5.2.9 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $A \neq \emptyset$ แล้ว

1. $\forall a \in A, [a]_r \neq \emptyset$
2. $\forall a, b \in A, [a]_r \cap [b]_r \neq \emptyset \leftrightarrow a r b$
3. $\forall a, b \in A, [a]_r = [b]_r \leftrightarrow a r b$
4. $\forall a, b \in A, [a]_r \neq [b]_r \leftrightarrow [a]_r \cap [b]_r = \emptyset$

บทพิสูจน์. ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

1. ให้ $a \in A$ เนื่องจาก r มีสมบัติสะท้อนจะได้ว่า $a r a$ ดังนั้น $a \in [a]_r$ นั่นคือ $[a]_r \neq \emptyset$
2. ให้ $a, b \in A$ สมมติว่า $[a]_r \cap [b]_r \neq \emptyset$ จะได้ว่ามี $x \in A$ ซึ่ง $x \in [a]_r \cap [b]_r$ แล้ว $x \in [a]_r$ และ $x \in [b]_r$ ดังนั้น $a r x$ และ $x r b$ โดยสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า $a r b$ ในทางกลับกัน สมมติว่า $a r b$ จะได้ว่า $a \in [b]_r$ และ $a \in [a]_r$ ดังนั้น $a \in [a]_r \cap [b]_r \neq \emptyset$

3-4 ทำเป็นแบบฝึกหัด



บทนิยาม 5.2.10 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ Λ เป็นเซตคอร์ดรีนิ จะกล่าวว่า

$$\Pi = \{A_\alpha \mid \emptyset \neq A_\alpha \subseteq A \text{ และ } \alpha \in \Lambda\}$$

เป็นผลแบ่งกัน (Partition) ของ A ถ้า

$$(1) \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = A$$

$$(2) \forall \alpha, \beta \in \Lambda, A_\alpha = A_\beta \text{ หรือ } A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$$

ตัวอย่าง 5.2.11 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ จงยกตัวอย่างผลแบ่งกันของ A มาอย่างน้อย 2 เซต
วิธีทำ

$$\Pi_1 = \{\{2, 4, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 7\}\}$$

$$\Pi_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8\}\}$$

$$\Pi_3 = \{\{1\}\{2, 5, 8\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}$$

ทฤษฎีบท 5.2.12 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A แล้ว A/r เป็นผลแบ่งกันหนึ่งของ A

บทพิสูจน์. ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

$$(1) \text{ จะแสดงว่า } \bigcup_{a \in A} [a] = A$$

เนื่องจาก $a \in [a] \subseteq A$ ทุกๆ $a \in A$ จะได้ว่า $A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a] \subseteq A$ สรุปได้ว่า $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

$$(2) \text{ จะได้ว่า } \forall a, b \in A, [a] = [b] \text{ หรือ } [a] \cap [b] = \emptyset \text{ โดยทฤษฎีบท 5.2.9 ข้อ 4}$$

สรุปได้ว่า A/r เป็นผลแบ่งกันของ A



บทนิยาม 5.2.13 ให้ Π เป็นผลแบ่งกันของเซต A นิยามความสัมพันธ์ A/Π บน A เรียกว่า A มอดูโล Π โดย

$$(x, y) \in A/\Pi \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{มี } B \in \Pi \text{ ซึ่ง } \{x, y\} \subseteq B$$

ตัวอย่าง 5.2.14 กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $\Pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{c, d\}\}$ จงหา A/Π
วิธีทำจะได้ว่า

$$A/\Pi = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$$

ตัวอย่าง 5.2.15 กำหนดให้ $A = \mathbb{N}$ และ $\Pi = \{\{1, 3, 5, 7, \dots\}, \{2, 4, 6, 8, \dots\}\}$ จงหา A/Π
วิธีทำ จะได้

$$A/\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2 \mid (y - x)\}$$

ทฤษฎีบท 5.2.16 ให้ Π เป็นผลแบ่งกันของเซต $A \neq \emptyset$ แล้ว A/Π เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

บทพิสูจน์. ให้ Π เป็นผลแบ่งกันของ A

1. ให้ $a \in A$ เนื่องจาก Π เป็นผลแบ่งกันจะได้ว่ามี $B \in \Pi$ ซึ่ง $x \in B$ หรือ $\{x\} \subseteq B$ นั่นคือ $(x, x) \in A/\Pi$ ดังนั้น A/Π มีสมบัติสะท้อน
2. ให้ $x, y \in A$ สมมติ $(x, y) \in A/\Pi$ จะได้ว่ามี $B \in \Pi$ ซึ่ง $\{x, y\} \subseteq B$ เนื่องจาก $\{y, x\} \subseteq B$ ดังนั้น $(y, x) \in A/\Pi$ นั่นคือ A/Π มีสมบัติสมมาตร
3. ให้ $x, y, z \in A$ สมมติ $(x, y) \in A/\Pi$ และ $(y, z) \in A/\Pi$ จะได้ว่ามี $B_1, B_2 \in \Pi$ ซึ่ง $\{x, y\} \subseteq B_1$ $\{y, z\} \subseteq B_2$ เห็นได้ชัดว่า $y \in B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ดังนั้น $B_1 = B_2$

$$\{x, z\} \subseteq \{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{y, z\} \subseteq B_1 \cup B_2 = B_1$$

ดังนั้น $(x, z) \in A/\Pi$ สรุปได้ว่า A/Π มีสมบัติถ่ายทอด

ดังนั้น A/Π เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A □

ทฤษฎีบท 5.2.17 ให้ Π เป็นผลแบ่งกันของเซต $A \neq \emptyset$ และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A แล้ว

$$A/(A/r) = r \quad \text{และ} \quad A/(A/\Pi) = \Pi$$

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด □

5.3 การเรียงอันดับบางส่วน

บทนิยาม 5.3.1 เรียกความสัมพันธ์ r บนเซต P ว่า **การเรียงอันดับบางส่วน (Partial ordering)**

ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด โดยทั่วไปนิยมเขียน $\preceq$ แทนอันดับที่ละส่วน และเรียกคู่อันดับ $(P, \preceq)$ ว่า **เซตซึ่งเรียงอันดับบางส่วนได้ (Partially ordered set)** หรือ **โพเซต (Poset)**

สำหรับโพเซต $(P, \preceq)$ นิยามความสัมพันธ์ $\prec$ บน P โดยสำหรับ $a, b \in P$

$$a \prec b \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a \preceq b \quad \text{และ} \quad a \neq b$$

ตัวอย่าง 5.3.2 กำหนดให้ $P = \{1, 2, 3\}$ จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นการเรียงอันดับบางส่วนบน P

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ | เป็นการเรียงอันดับบางส่วน เขียนแทนด้วย $(P, =)$ |
| 2. ความสัมพันธ์ว่าง | ไม่เป็นการเรียงอันดับบางส่วนเพราะไม่มีสมบัติสะท้อน |
| 3. ความสัมพันธ์เอกภาพ | ไม่เป็นการเรียงอันดับบางส่วนเพราะไม่มีสมบัติปฏิสมมาตร |
| 4. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า" | ไม่เป็นการเรียงอันดับบางส่วนเพราะไม่มีสมบัติสะท้อน |

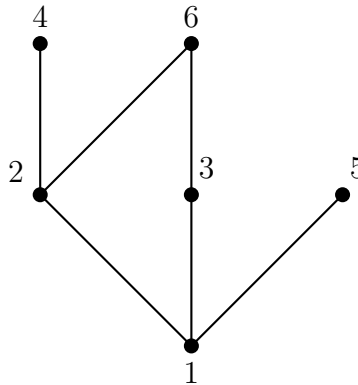
5. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" เป็นการเรียงอันดับบางส่วน เขียนแทนด้วย $(P, \leq)$
6. ความสัมพันธ์ "หารลงตัว" เป็นการเรียงอันดับบางส่วน เขียนแทนด้วย $(P, |)$

ตัวอย่างโพเซตอื่นๆ เช่น $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ และ $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง

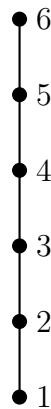
ในกรณีที่เซต P เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง นิยามแทน $(P, \preceq)$ ด้วย **แผนภาพแฮสเซ** (Hasse diagram) ซึ่งประกอบไปด้วยจุดหรือวงกลมเล็กๆ แทนสมาชิกใน P และส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด a และจุด b เมื่อ $a \prec b$ และไม่มี $c \in P$ ซึ่ง $a \prec c \prec b$ โดยจุด b จะถูกเขียนไว้เหนือจุด a ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ จงเขียนแผนภาพแฮสเซของโพเซตต่อไปนี้

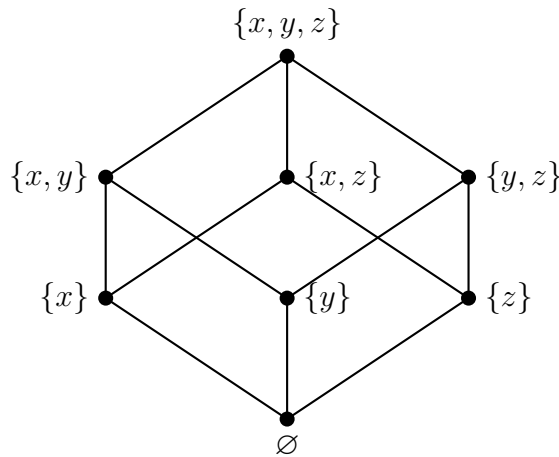
1. $(P, |)$
วิธีทำ



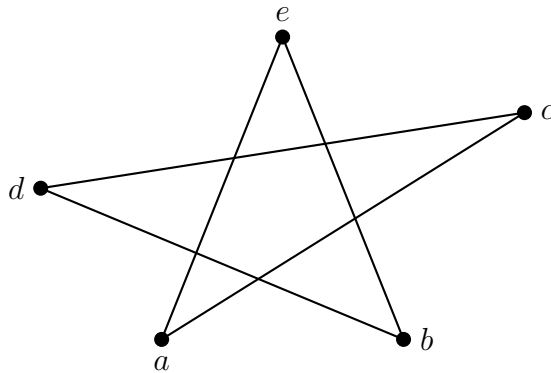
2. $(P, \leq)$
วิธีทำ



ตัวอย่าง 5.3.4 จงเขียนแผนภาพแฮชเชอของโพเซต $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{x, y, z\}$
วิธีทำ



ตัวอย่าง 5.3.5 จากแผนภาพแฮชเชอของโพเซต จงหาโพเซตและอันดับบางส่วน



วิธีทำ ให้ $P = \{a, b, c, d, e\}$ และ $a \preceq a, a \preceq e, a \preceq c, b \preceq b, b \preceq d, b \preceq e, d \preceq d, d \preceq c, c \preceq c, e \preceq e$
หรือ

$$\preceq = \{(a, a), (a, e), (a, c), (b, b), (b, d), (b, e), (d, d), (d, c), (c, c), (e, e)\}$$

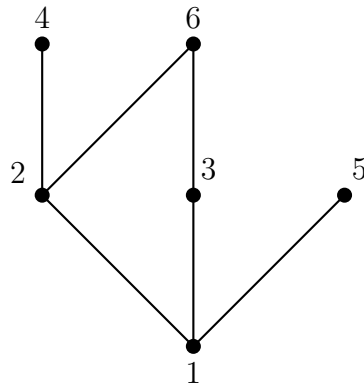
จะได้ว่า $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต

บทนิยาม 5.3.6 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต m และ n เป็นสมาชิกใน P จะกล่าวว่า

m เป็นสมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่ม (Maximal element) ของ P ก็ต่อเมื่อไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $m \prec x$
นั่นคือ $\forall x \in P, m \preceq x \rightarrow m = x$

n เป็นสมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่ม (Minimal element) ของ P ก็ต่อเมื่อไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $x \prec n$
นั่นคือ $\forall x \in P, x \preceq n \rightarrow n = x$

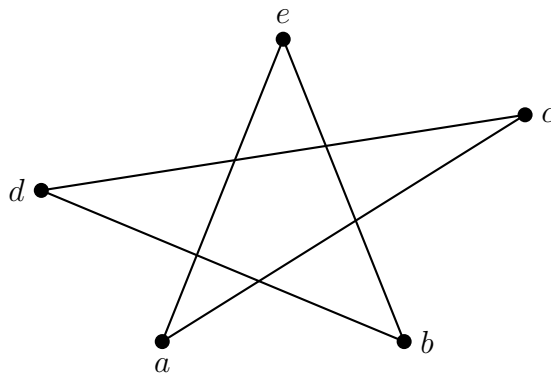
ตัวอย่าง 5.3.7 จากแผนภาพแฮสเชของโพเซต $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$



สมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่มคือ 4, 5 และ 6 สมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่มคือ 1

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่าสมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่มมีได้หลายตัว ในทำนองเดียวกันสมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่มของเซตก็อาจมีได้หลายตัว

ตัวอย่าง 5.3.8 จากแผนภาพแฮสเชของโพเซต $(\{a, b, c, d, e\}, \preceq)$



สมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่มคือ c และ e สมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่มคือ a และ b

สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ r ในแง่คณิตศาสตร์หมายถึงเซตของคู่อันดับที่อยู่ในผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ นิยามโดเมนและเรนจ์ดังนี้

$$\text{Dom}(r) = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a, b) \in r\}$$

$$\text{Ran}(r) = \{b \in B \mid \exists a \in A, (a, b) \in r\}$$

พร้อมตัวอย่างความสัมพันธ์ที่มีลักษณะเฉพาะเช่น ความสัมพันธ์ว่าง ความสัมพันธ์เอกภพ ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ ความสัมพันธ์หารลงตัว และความสัมพันธ์น้อยกว่า เป็นต้น ต่อมาศึกษาความสัมพันธ์บนเซต A และตรวจสอบสมบัติ 4 ข้อคือ

- | | | |
|--------------------------|------------|---|
| 1. r มีสมบัติสะท้อน | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a \in A, \quad a r a$ |
| 2. r มีสมบัติสมมาตร | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b \in A, \quad a r b \rightarrow b r a$ |
| 3. r มีสมบัติปฏิสมมาตร | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b \in A, \quad (a r b \wedge b r a) \rightarrow a = b$ |
| 4. r มีสมบัติถ่ายทอด | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b, c \in A, \quad (a r b \wedge b r c) \rightarrow a r c$ |

ถ้าความสัมพันธ์ใดมีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด จะเรียกว่าความสัมพันธ์สมมูล และสร้างชั้นสมมูลของสมาชิกต่างๆในความสัมพันธ์ และชั้นสมมูลเหล่านั้นจะกลายเป็นผลแบ่งกันของเซต A ถ้าความสัมพันธ์ใดมีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด จะเรียกว่าโพเซต หรือการเรียงอันดับบางส่วน เขียนแทนด้วย $(P, \preceq)$ และนิยามสมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่ม และสมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่มได้ดังนี้

1. m เป็นสมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่ม ของ P ก็ต่อเมื่อไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $m \prec x$ นั่นคือ

$$\forall x \in P, m \preceq x \rightarrow m = x$$

2. n เป็นสมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่ม ของ P ก็ต่อเมื่อไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $x \prec n$ นั่นคือ

$$\forall x \in P, x \preceq n \rightarrow n = x$$

คำถามท้ายบท

1. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบดังกล่าว
 - 1.1 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ xry มีความหมายว่า $x > y^2$
 - 1.2 ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ xry ก็ต่อเมื่อ $3 \mid (2x - y)$
 - 1.3 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 9x^2 + 16y^2 = 1\}$
 - 1.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| < 1\}$
2. ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ กำหนดให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงแสดงว่า
 - 2.1 $\text{Dom}(r \cup s) = \text{Dom}(r) \cup \text{Dom}(s)$
 - 2.2 $\text{Dom}(r \cap s) \subseteq \text{Dom}(r) \cap \text{Dom}(s)$
 - 2.3 $\text{Ran}(r \cup s) = \text{Ran}(r) \cup \text{Ran}(s)$
 - 2.4 $\text{Ran}(r \cap s) \subseteq \text{Ran}(r) \cap \text{Ran}(s)$
3. จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r มีสมบัติใดบ้าง พร้อมทั้งพิสูจน์
 - 3.1 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^2\}$
 - 3.2 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq |x|\}$
 - 3.3 ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ xry ก็ต่อเมื่อ $3 \mid (x - 2y)$
4. กำหนดให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน $A \neq \emptyset$ จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้
 - 4.1 ถ้า r และ s มีสมบัติสะท้อน แล้ว $r \cup s$ มีสมบัติสะท้อน
 - 4.2 ถ้า r หรือ s มีสมบัติสะท้อน แล้ว $r \cap s$ มีสมบัติสะท้อน
 - 4.3 ถ้า r และ s มีสมบัติสมมาตร แล้ว $r \cup s$ มีสมบัติสมมาตร
 - 4.4 ถ้า r หรือ s มีสมบัติสมมาตร แล้ว $r \cap s$ มีสมบัติสมมาตร
 - 4.5 ถ้า r และ s มีสมบัติถ่ายทอด แล้ว $r \cap s$ มีสมบัติถ่ายทอด
 - 4.6 ถ้า r และ s มีสมบัติถ่ายทอด แล้ว $r \cup s$ มีสมบัติถ่ายทอด
5. กำหนดให้ $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ และ $s = \{(1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 2)\}$ จงหา
 - 5.1 $s \circ r$
 - 5.2 $\text{Dom}(s \circ r)$
 - 5.3 $\text{Dom}(r \circ s)$
 - 5.4 $\text{Ran}(s \circ r)$
 - 5.5 $\text{Ran}(r \circ s)$
 - 5.6 $r^{-1} \circ s^{-1}$
 - 5.7 $(r \circ s)^{-1}$
 - 5.8 $(s \circ r) \circ s$
6. ให้ $A \neq \emptyset$ และ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A จงแสดงว่า
 - 6.1 $(r^{-1})^{-1} = r$

$$6.2 \ (i_A)^{-1} = i_A$$

6.3 r เป็นความสัมพันธ์สมมูล ก็ต่อเมื่อ r^{-1} เป็นความสัมพันธ์สมมูล

6.4 ถ้า r มีสมบัติสมมาตร แล้ว $r \circ r$ มีสมบัติสมมาตร

6.5 r เป็นการเรียงลำดับบางส่วน ก็ต่อเมื่อ r^{-1} เป็นการเรียงลำดับบางส่วน

7. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C จงแสดงว่า

$$7.1 \text{ Dom}(s \circ r) \subset \text{Dom}(r)$$

$$7.2 \text{ Ran}(s \circ r) \subseteq \text{Ran}(s)$$

$$7.3 \text{ ถ้า } \text{Ran}(r) \subseteq \text{Dom}(s) \text{ แล้ว } \text{Dom}(s \circ r) = \text{Dom}(r)$$

8. ให้ $A \neq \emptyset$ เป็นเซตใด ๆ ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน A จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ถ้าเป็นจริง จงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

$$8.1 \text{ ถ้า } r \cup s \text{ เป็นความสัมพันธ์สมมูล แล้ว } s \circ r = r \circ s$$

$$8.2 \text{ ถ้า } r \cup s = r \circ s \text{ แล้ว } r \cup s \text{ เป็นความสัมพันธ์สมมูล}$$

$$8.3 \text{ ถ้า } r \cup s = r \circ s \text{ แล้ว } s \circ r = r \circ s$$

9. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือการเรียงลำดับบางส่วน

$$9.1 \ r = \{(a, b), (b, a)\}$$

$$9.3 \ r = \{(a, a), (b, b)\}$$

$$9.2 \ r = \{(c, d), (c, c)\}$$

$$9.4 \ r = \{(d, c)\}$$

10. จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือการเรียงลำดับบางส่วน

$$10.1 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 2\}$$

$$10.2 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid (x - y)\}$$

$$10.3 \text{ ให้ } S \text{ เป็นเซต และ } A, B \in \mathcal{P}(S) \text{ กำหนดให้ } ArB \text{ มีความหมายว่า } A \subseteq B$$

11. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\Pi = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}, \{7, 8\}\}$

$$\text{และ } r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (1, 2), (2, 1)\}$$

จงหาสมาชิกของ

$$11.1 \ A/r$$

$$11.3 \ A/\Pi$$

$$11.5 \ A/(A/r)$$

$$11.2 \ [3]_r$$

$$11.4 \ [3]_{A/\Pi}$$

$$11.6 \ A/(A/\Pi)$$

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- ชวลิต บุรพาศิริวัฒน์. (2538). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏจันทรเกษม.
- ชะเอม สายทอง. (2530). **ทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ไอดีเอ็นเอสไตร์.
- มานะ เอกจริยวงศ์. (2542). **ทฤษฎีเซต**. ลพบุรี: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ สถาบันราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2558). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: วี.พรีนท์(1991).
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อัมพร ม้าคนอง. (2559). **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์.
- Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014) **Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended)**. Marlestone, Australia : Haese& Harris Publications.
- Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. นิยามและชนิดของฟังก์ชัน
2. ฟังก์ชันค่าจริงและพีชคณิตของฟังก์ชัน
3. ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ
4. ภาพแลพภาพผกผัน
5. การดำเนินการทวิภาค
6. การจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. ตรวจสอบความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและระบุนิยามของฟังก์ชันได้
2. รู้จักฟังก์ชันค่าจริงและตรวจสอบสมบัติต่างๆเกี่ยวกับฟังก์ชันค่าจริง
3. ตรวจสอบฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันผกผันได้
4. เข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันประกอบและพิสูจน์สมบัติบางประการได้
5. ตรวจสอบสมบัติของการดำเนินการทวิภาคที่กำหนดให้ได้
6. รู้จักการจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน
 - 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
 - 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
 - 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. กิจกรรมการเรียนการสอน
 - 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
 - 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
 - 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย
 - 2.4 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
 - 2.5 มอบหมายให้ทำ assignment เพื่อส่งท้ายคาบ

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "ฟังก์ชัน"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในใบบันทึกผลงาน

บทที่ 6

ฟังก์ชัน

หลายครั้งที่เราเคยได้ยินคำว่า "ฟังก์ชัน (function)" ในชีวิตประจำวัน โดยเฉพาะในเครื่องมือสื่อสารใหม่ ๆ นักโฆษณามักจะกล่าวว่าสินค้าของตัวเองมีฟังก์ชันต่าง ๆ มากมาย ทำให้ผู้อ่านเองพอนึกออกว่าฟังก์ชันน่าจะหมายถึงคำสั่งที่เราเลือกทำสิ่งต่าง ๆ บนอุปกรณ์หรือสินค้าเหล่านั้นเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่เราต้องการ แต่นี่เป็นความหมายทางคอมพิวเตอร์ ในทางคณิตศาสตร์ให้ความหมายของฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้าแต่ละตัวจะจับคู่กับสมาชิกตัวหลังได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น ตัวอย่างเช่น

"ระดับคะแนนวิชาแคลคูลัส 1 ของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์" เป็นฟังก์ชันจากเซตของนักศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ไปยังเซตของระดับคะแนน $\{F, D^-, D, D^+, C^-, C, C^+, B^-, B, B^+, A^-, A\}$ ถ้านายอิทธิได้ระดับคะแนน A เขียนแทนด้วย (นายอิทธิ, A) สมาชิกตัวหน้าจับได้เพียงครั้งเดียวกับสมาชิกตัวหลัง เพราะเป็นไปไม่ได้ที่นักศึกษาหนึ่งคนจะได้ระดับคะแนนวิชาแคลคูลัส 1 หลายระดับคะแนน

ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามของฟังก์ชัน ตัวอย่าง ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องของฟังก์ชัน

6.1 นิยามและชนิดของฟังก์ชัน

บทนิยาม 6.1.1 จะกล่าวว่าความสัมพันธ์ $f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน (Function หรือ Mapping)

ก็ต่อเมื่อแต่ละ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ใน f ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$ นั่นคือ

$$f \subseteq A \times B \text{ เป็นฟังก์ชัน} \leftrightarrow \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f, x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$$

จากนิยามจะได้ว่า $\emptyset$ เป็นฟังก์ชัน และ f ไม่เป็นฟังก์ชันเมื่อมี $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ ซึ่ง $x_1 = x_2$ และ $y_1 \neq y_2$

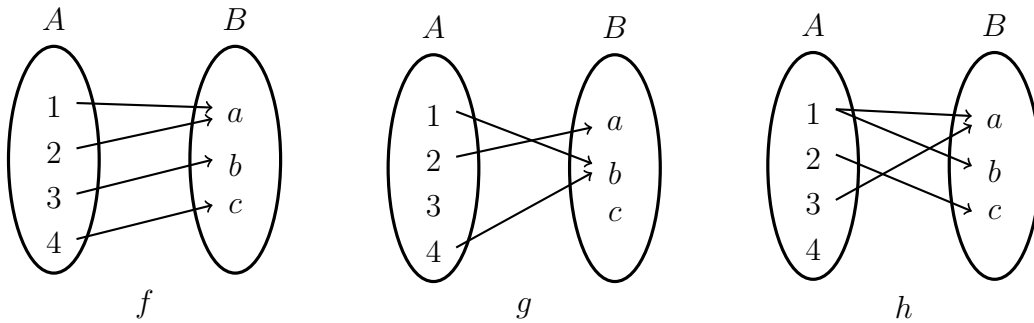
ตัวอย่าง 6.1.2 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ จงตรวจสอบว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1. $f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$

2. $g = \{(1, a), (2, b), (4, c)\}$

3. $h = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\}$

วิธีทำ แสดงแผนภาพแต่ละความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 28 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ f, g และ h

จากแผนภาพจะเห็นได้ว่า f และ g เป็นฟังก์ชัน แต่ h ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะว่า $(1, a) \in h$ และ $(1, b) \in h$ แต่ $a \neq b$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1 - x^2\}$

วิธีทำ ให้ $(x_1, y_1) \in f$ และ $(x_2, y_2) \in f$ สมมติว่า $x_1 = x_2$ จะได้ว่า

$$y_1 = 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 = y_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

2. $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| = 2\}$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $(1, 1) \in g$ และ $(1, -1) \in g$ แต่ $1 \neq -1$ ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชัน

ถ้า $f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน แต่ละ $x \in A$ มี $y \in B$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $(x, y) \in f$ เราจึงแทน y ด้วย $f(x)$ นั่นคือ $y = f(x)$

ตัวอย่าง 6.1.4 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$ แล้วจะได้ว่า

1. $f(1) + f(2) = 2 + 3 = 5$

2. $g(3) - g(4) = 3 - 2 = 1$

3. $f(4) \cdot g(2) = 1 \cdot 1 = 1$

4. $f(g(3)) - g(f(3)) = f(4) - g(1) = 1 - 1 = 0$

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันมีความหมายเดียวกับโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

บทนิยาม 6.1.5 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (Function from A into B) เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชัน
2. $\text{Dom}(f) = A$
3. $\text{Ran}(f) \subseteq B$

ตัวอย่าง 6.1.6 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ ข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. $f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
2. $g = \{(1, a), (1, b), (3, c), (4, d)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ g ไม่เป็นฟังก์ชัน
3. $h = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ $\text{Dom}(h) \neq A$
4. $t = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ $\text{Dom}(t) \neq A$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงแสดงว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

บทพิสูจน์. ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ สมมติว่า $x_1 = x_2$ จะได้ว่า

$$y_1 = 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 = y_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก $\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า $x \in \mathbb{R}$ เลือก $y = 2x + 1$ จะได้ว่า $x \in \text{Dom}(f)$ นั่นคือ $\mathbb{R} \subseteq \text{Dom}(f)$ ดังนั้น $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ สรุปได้ว่า $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ □

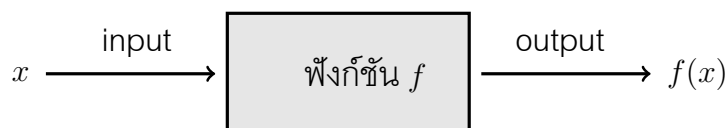
จากตัวอย่างข้างต้นนิยามเขียน

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ กำหนดโดย } f(x) = 2x + 1 \quad \text{แทน} \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$$

บางครั้งใช้สัญลักษณ์

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ กำหนดโดย } x \mapsto 2x + 1$$

สัญลักษณ์ $x \mapsto y$ หมายถึง x ถูกส่ง (Map) ไปยัง y โดยการมองว่าฟังก์ชันเป็นเครื่องจักรอันหนึ่ง เมื่อใส่ x (Input) ผลที่ออกมาจากเครื่องจักรนี้ก็คือ y หรือ $f(x)$ (Output) แสดงดังภาพ



รูปที่ 29 แผนภาพแสดง input และ output ของฟังก์ชัน

จากตัวอย่าง 6.1.7 เขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ความหมายคือเมื่อส่ง x เข้าไปฟังก์ชันนี้จะทำการคูณสองเท่าของ x และบวกเพิ่มอีก 1 แล้วส่งผลลัพธ์ออกมาจากฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 6.1.8 จงแสดงว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

บทพิสูจน์. ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ สมมติว่า $x_1 = x_2$ จะได้ว่า

$$y_1 = x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 = y_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก $\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า $x \in \mathbb{R}$ เลือก $y = x^2 - 1$ จะได้ว่า $x \in \text{Dom}(f)$ นั่นคือ $\mathbb{R} \subseteq \text{Dom}(f)$ ดังนั้น $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ สรุปได้ว่า $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ □

ตัวอย่าง 6.1.9 ให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $-1 \notin \text{Dom}(f)$ ดังนั้น $\text{Dom}(f) \neq \mathbb{R}$ สรุปได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ ต่อไปจะแสดงว่า $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

บทพิสูจน์. ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ สมมติว่า $x_1 = x_2$ เมื่อ $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ จะได้ว่า

$$y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} = y_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน ให้ $x \in \text{Dom}(f)$ แล้ว $y = \sqrt{x}$ ดังนั้น $x \geq 0$ จะได้ว่า $\text{Dom}(f) \subseteq [0, \infty)$

ในทางกลับกันให้ $x \geq 0$ เลือก $y = \sqrt{x}$ นั่นคือ $x \in \text{Dom}(f)$ ดังนั้น $[0, \infty) \subseteq \text{Dom}(f)$ สรุปได้ว่า $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ □

จากตัวอย่างข้างต้นสรุปได้ว่าถ้า $f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า $f : \text{Dom}(f) \rightarrow B$ ต่อไปจะพิจารณาการเท่ากันของฟังก์ชันเนื่องจากฟังก์ชันเป็นเซตดังนั้น $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $f \subseteq g$ และ $g \subseteq f$ แต่ไม่นิยมใช้วิธีนี้ในการตรวจสอบเนื่องจากฟังก์ชันมักเขียน y ในรูปของ $f(x)$ จึงใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ในการตรวจสอบ

ทฤษฎีบท 6.1.10 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$f = g \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \text{ และ } f(x) = g(x) \quad \text{ทุก } x \in \text{Dom}(f)$$

บทพิสูจน์. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

สมมติ $f = g$ จะเห็นได้ชัดว่า $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ เนื่องจากคู่อันดับทุกคู่ใน f และ g เหมือนกัน ให้ $x \in \text{Dom}(f)$ จะได้ว่ามี y ซึ่ง $(x, y) \in f$ นั่นคือ $y = f(x)$ เนื่องจาก $f = g$ ดังนั้น $(x, y) \in g$ นั่นคือ

$y = g(x)$ สรุปได้ว่า $f(x) = g(x)$ ทุก ๆ $x \in \text{Dom}(f)$ ในทางกลับกันสมมติ $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ และ $f(x) = g(x)$ ทุก ๆ $x \in \text{Dom}(f)$ ให้ $(x, y) \in f$ จะได้ว่า $x \in \text{Dom}(f)$ และ $y = f(x)$ เนื่องจาก $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ ฉะนั้น $x \in \text{Dom}(g)$ และ $y = f(x) = g(x)$ ดังนั้น $(x, y) \in g$ สรุปได้ว่า $f \subseteq g$ ในทำนองเดียวกันพิสูจน์ได้ว่า $g \subseteq f$ ทำให้ได้ว่า $f = g$ $\square$

ตัวอย่าง 6.1.11 กำหนดให้

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 2\}$$

$$g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right\}$$

จะได้ว่า $f \neq g$ เพราะว่า $2 \in \text{Dom}(f)$ แต่ $2 \notin \text{Dom}(g)$ ดังนั้น $\text{Dom}(f) \neq \text{Dom}(g)$

ตัวอย่าง 6.1.12 กำหนดให้

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{กำหนดโดย} \quad f(x) = 2x + 1$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{กำหนดโดย} \quad g(x) = 2x + 1$$

จะได้ว่า $f \neq g$ เพราะว่า $\text{Dom}(f) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{N} = \text{Dom}(g)$

บทนิยาม 6.1.13 กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ จะกล่าวว่า

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one หรือ Injection) หรือ ฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

เขียนแทนฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B ด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

2. f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (Onto function หรือ Surjection) ก็ต่อเมื่อ $\text{Ran}(f) = B$ หรือ

$$\forall y \in B \exists x \in A, y = f(x)$$

เขียนแทนฟังก์ชันจาก A ทั่วถึง B ด้วย $f : A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

3. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (Bijection) หรือการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one correspondence) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เขียนแทนฟังก์ชัน 1-1 จาก A ทั่วถึง B ด้วย $f : A \xrightarrow[1-1]{\text{ทั่วถึง}} B$

ตัวอย่าง 6.1.14 ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = 2x + 1$ พิจารณาชนิดของฟังก์ชัน f

1. ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. ให้ $y \in \mathbb{R}$ เลือก $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$f(x) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

ตัวอย่าง 6.1.15 ให้ $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = \frac{x}{x+1}$ พิจารณาชนิดของฟังก์ชัน f

1. ให้ $x_1, x_2 \in (0, 1)$ สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1} \\ x_1(x_2+1) &= x_2(x_1+1) \\ x_1x_2 + x_1 &= x_2x_1 + x_2 \\ x_1 &= x_2\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. เนื่องจาก $x \neq x+1$ ทุก ๆ $x \in (0, 1)$ ดังนั้น $f(x) \neq 1$ $x \in (0, 1)$ สรุปได้ว่า $\text{Ran}(f) \neq f$
ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

ตัวอย่าง 6.1.16 ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x^2 - 1$ พิจารณาชนิดของฟังก์ชัน f

1. จะเห็นได้ชัดว่า $f(1) = 1^2 - 1 = 0 = (-1)^2 - 1 = f(-1)$ แต่ $1 \neq -1$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $y = f(x) = x^2 - 1 \geq -1$ สรุปได้ว่า $\text{Ran}(f) = [-1, \infty) \neq \mathbb{R}$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จากการสังเกตข้างต้นจะได้ว่า $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} [-1, \infty)$

ดังนั้นถ้า $f : A \rightarrow B$ แล้ว $f : A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} \text{Ran}(f)$

ตัวอย่าง 6.1.17 ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

พิจารณาชนิดของฟังก์ชัน f

1. เห็นได้ชัดว่า $f(2) = \frac{2}{2} = 1 = \frac{1+1}{2} = f(1)$ แต่ $2 \neq 1$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. ให้ $y \in \mathbb{N}$ เลือก $x = 2y$ ดังนั้น x เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

ตัวอย่าง 6.1.18 ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\frac{x-1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

1. จะพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยวิธีแย่งสลับที่ นั่นคือ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $x_1 \neq x_2$

กรณีที่ 1 x_1 และ x_2 เป็นจำนวนคู่
เนื่องจาก $x_1 \neq x_2$ จะได้ว่า $\frac{x_1}{2} \neq \frac{x_2}{2}$ สรุปได้ว่า $f(x_1) \neq f(x_2)$

กรณีที่ 2 x_1 และ x_2 เป็นจำนวนคี่
เนื่องจาก $x_1 \neq x_2$ จะได้ว่า $-\frac{x_1-1}{2} \neq -\frac{x_2-1}{2}$ สรุปได้ว่า $f(x_1) \neq f(x_2)$

กรณีที่ 3 x_1 เป็นจำนวนคี่ และ x_2 เป็นจำนวนคู่
เนื่องจาก $x_1 \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $x_1 \geq 1$ นั่นคือ $1 - x_1 \leq 0$ และเป็นจำนวนคู่
ดังนั้น $f(x_1) = -\frac{x_1-1}{2} \leq 0$ เนื่องจาก $x_2 \in \mathbb{N}$ และเป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $x_2 \geq 2$ ดังนั้น
 $f(x_2) = \frac{x_2}{2} \geq 1$ สรุปได้ว่า

$$f(x_1) \leq 0 \neq 1 \leq f(x_2)$$

กรณีที่ 4 x_1 เป็นจำนวนคู่ และ x_2 เป็นจำนวนคี่
พิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 3

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. ให้ $y \in \mathbb{Z}$

กรณีที่ 1 $y > 0$

จะได้ว่า $2y > 0$ และเป็นจำนวนคู่ เลือก $x = 2y$ ดังนั้น

$$f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y$$

กรณีที่ 2 $y \leq 0$

จะได้ว่า $-2y \geq 0$ นั่นคือ $1 - 2y \geq 1$ และเป็นจำนวนคี่ เลือก $x = 1 - 2y$ ดังนั้น

$$f(x) = f(1 - 2y) = -\frac{1 - 2y - 1}{2} = y$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

6.2 ฟังก์ชันค่าจริงและพีชคณิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม 6.2.1 จะเรียก $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ว่าฟังก์ชันค่าจริง (Real-value function) นั่นคือ $\text{Ran}(f) \subseteq \mathbb{R}$

ในตำราเล่มนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าจริงในกรณีที่ $A \subseteq \mathbb{R}$ ตัวอย่าง $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = 2x + 1$ เป็นต้น และเขียนย่อ ๆ ว่า

$$f(x) = 2x + 1$$

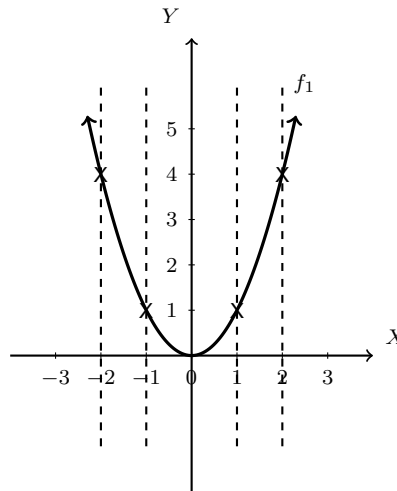
แทนฟังก์ชันค่าจริงซึ่งมีโดเมนเป็นสับเซตจำนวนจริง

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันค่าจริงเป็นสับเซตของ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยกราฟในระนาบสองมิติดังที่เคยแสดงมาแล้วในเรื่องความสัมพันธ์ ต่อไปจะเป็นการตรวจสอบความสัมพันธ์ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่โดยใช้การทดสอบเส้นแนวตั้ง (Verticle line test) หลักการคือลากเส้นแนวตั้ง (เส้นตั้งฉากกับแกน X) ถ้า f เป็นฟังก์ชันทุก ๆ เส้นแนวตั้งในบริเวณโดเมนต้องตัดกับกราฟความสัมพันธ์เพียงจุดเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 6.2.2 ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยใช้การทดสอบเส้นแนวดิ่ง

1. $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

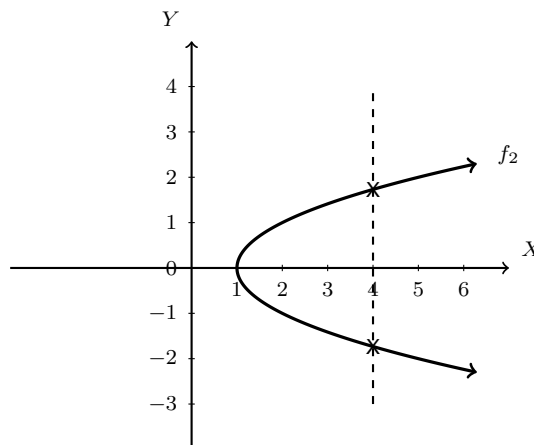
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



เนื่องจากเส้นแนวดิ่งทุกเส้นบนโดเมนตัดกราฟ f_1 เพียงจุดเดียวเสมอ ทำให้สรุปได้ว่า f_1 เป็นฟังก์ชัน

2. $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x - 1\}$

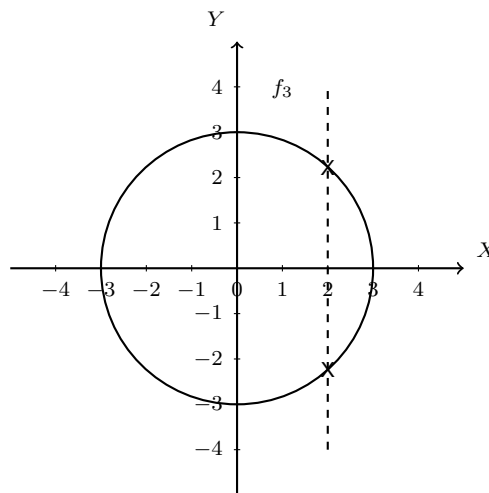
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



เนื่องจากเส้นแนวดิ่ง $x = 4$ ตัดกราฟ f_2 สองจุด ทำให้สรุปได้ว่า f_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$

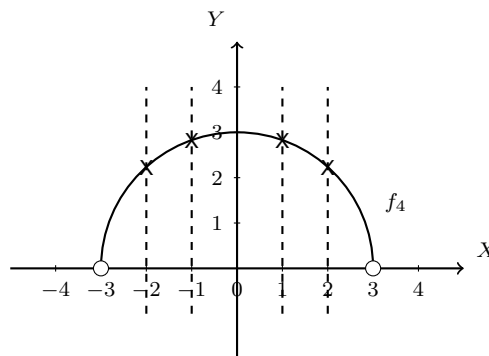
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



เนื่องจากเส้นแนวดิ่ง $x = 2$ ตัดกราฟ f_3 สองจุด ทำให้สรุปได้ว่า f_3 ไม่เป็นฟังก์ชัน

4. $f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid x^2 + y^2 = 9\}$

วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



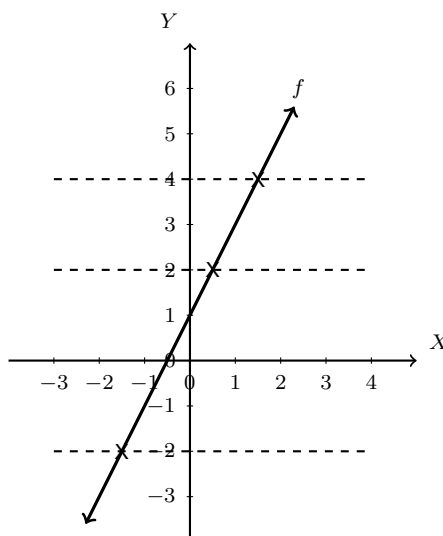
เนื่องจากเส้นแนวดิ่งทุกเส้นบนโดเมนตัดกราฟ f_4 เพียงจุดเดียวเสมอ ทำให้สรุปได้ว่า f_4 เป็นฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชันค่าจริง f การตรวจสอบฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งทำได้โดยการทดสอบเส้นแนวนอน (Horizontal line test) ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ถ้าเส้นแนวนอนทุกเส้นบนเรนจ์ตัดกราฟ f เพียงจุดเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 6.2.3 ฟังก์ชันค่าจริงต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่ โดยใช้การทดสอบเส้นแนวนอน

1. $f(x) = 2x + 1$

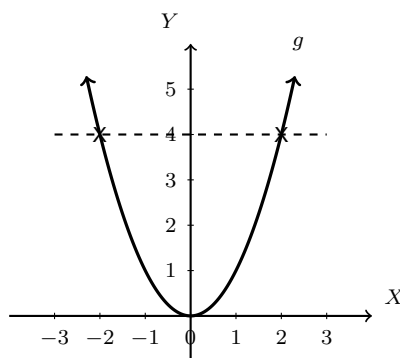
วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



เนื่องจากเส้นแนวนอนทุกเส้นบนเรนจ์ตัดกราฟ f เพียงจุดเดียวเสมอ ทำให้สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

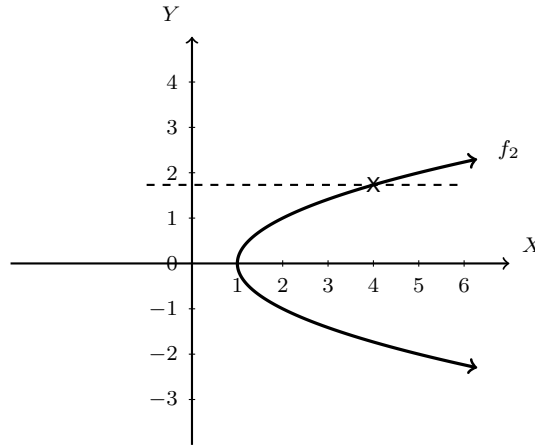
2. $g(x) = x^2$

วิธีทำ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



เนื่องจากเส้นแนวนอน $y = 4$ ตัดกราฟ g สองจุด ทำให้สรุปได้ว่า g ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

ข้อควรระวัง ในการทดสอบเส้นแนวนอน ถ้าความสัมพันธ์ที่กำหนดมายังไม่ทราบแน่ชัดว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริงหรือไม่ จะต้องทดสอบเส้นแนวนอนเพื่อตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันก่อน ถ้าไม่เป็นฟังก์ชันจะไม่ทดสอบเส้นแนวนอน มิเช่นนั้นจะเกิดข้อผิดพลาดในการสรุปคำตอบได้ ตัวอย่างเช่น



มองเห็น ๆ จะได้ว่ากราฟนี้เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ค่ากล่าวนี้ผิดเมื่อทดสอบเส้นแนวนอนพบว่ากราฟนี้ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะเส้นแนวนอนตัดมากกว่า 1 จุด

ในการกำหนด $f(x)$ กระทำโดยไม่รอบคอบอาจทำให้ f ที่ได้ไม่ใช่ฟังก์ชัน ควรตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันทุกครั้งเมื่อไม่แน่ใจ นั่นคือการตรวจสอบว่า การกำหนดฟังก์ชันเป็นไปอย่างแจ่มชัด (Well-defined) หรือไม่ ตัวอย่างเช่น สำหรับ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ กำหนดโดย $f\left(\frac{a}{b}\right) = a + b$ เป็นการกำหนดแบบไม่แจ่มชัด เพราะว่า $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 = 3 \neq 6 = 2 + 4 = f\left(\frac{2}{4}\right)$ แต่ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

บทนิยาม 6.2.4 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริง นิยามพีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of functions) ดังนี้

1. ผลบวก (Sum) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f + g$ นิยามโดย

$$f + g = \{(x, y) : y = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

2. ผลต่าง (Difference) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f - g$ นิยามโดย

$$f - g = \{(x, y) : y = f(x) - g(x) \text{ และ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

3. ผลคูณ (Product) ของ f และ g เขียนแทนด้วย fg นิยามโดย

$$fg = \{(x, y) : y = f(x)g(x) \text{ และ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

4. ผลหาร (Quotient) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $\frac{f}{g}$ นิยามโดย

$$\frac{f}{g} = \left\{ (x, y) : y = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \text{ และ } g(x) \neq 0 \right\}$$

ทฤษฎีบท 6.2.5 พีชคณิตของฟังก์ชันในบทนิยาม 6.2.4 เป็นฟังก์ชัน

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด □

โดยบทนิยาม 6.2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) & (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } g(x) \neq 0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.6 จงหาพีชคณิตของฟังก์ชัน เมื่อกำหนดให้

$$\begin{aligned}f &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (7, 3)\} \\ g &= \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 5), (5, 2), (6, 0)\}\end{aligned}$$

วิธีทำ จะได้ว่า $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}f+g &= \{(1, 2+0), (2, 3+1), (3, 4+2), (4, 5+5), (5, 1+2)\} \\ &= \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 10), (5, 3)\} \\ f-g &= \{(1, 2-0), (2, 3-1), (3, 4-2), (4, 5-5), (5, 1-2)\} \\ &= \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 0), (5, -1)\} \\ fg &= \{(1, 2 \cdot 0), (2, 3 \cdot 1), (3, 4 \cdot 2), (4, 5 \cdot 5), (5, 1 \cdot 2)\} \\ &= \{(1, 0), (2, 3), (3, 8), (4, 25), (5, 2)\} \\ \frac{f}{g} &= \left\{ \left(2, \frac{3}{1}\right), \left(3, \frac{4}{2}\right), \left(4, \frac{5}{5}\right), \left(5, \frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= \left\{ (2, 3), (3, 2), (4, 1), \left(5, \frac{1}{2}\right) \right\}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาพีชคณิตของฟังก์ชัน เมื่อกำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ และ $g(x) = \frac{x}{x+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ และ $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

ดังนั้น $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{เมื่อ } x \neq -1, 1 \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{2x-x^2}{x^2-1} \quad \text{เมื่อ } x \neq -1, 1 \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{(x^2-1)(x+1)} \quad \text{เมื่อ } x \neq -1, 1\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $g(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ ดังนั้น

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x-1} \quad \text{เมื่อ } x \neq -1, 0, 1$$

6.3 ฟังก์ชันผกผันและประกอบ

จากหัวข้อที่ผ่านมาความสัมพันธ์ผกผันย่อมเป็นความสัมพันธ์ แต่สำหรับฟังก์ชันเมื่อผกผันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไปเช่น

ฟังก์ชัน $f = \{(1, 2), (3, 2)\}$ เมื่อผกผันจะได้ $f^{-1} = \{(2, 1), (2, 3)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันลักษณะใดที่ผกผันแล้วยังเป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม 6.3.1 ให้ $f : A \rightarrow B$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ (Invertible function) ก็ต่อเมื่อ

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\} \text{ เป็นฟังก์ชัน}$$

และเรียก f^{-1} ว่าฟังก์ชันผกผัน (Inverse function) ของ f

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ และ $g = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$

จะได้ว่า $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ และ $g^{-1} = \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ แต่ g^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันผกผันไม่ได้

ทฤษฎีบท 6.3.3 ให้ $f : A \rightarrow B$ แล้วจะได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

บทพิสูจน์. สมมติ f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ให้ $(x_1, y_1) \in f$ และ $(x_2, y_2) \in f$ สมมติว่า $y_1 = y_2$ เนื่องจาก $(y_1, x_1) \in f^{-1}$ และ $(y_2, x_2) \in f^{-1}$ และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น $x_1 = x_2$ ในทางกลับกันสมมติ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 $(x_1, y_1) \in f^{-1}$ และ $(x_2, y_2) \in f^{-1}$ สมมติว่า $x_1 = x_2$ เนื่องจาก $(y_1, x_1) \in f$ และ $(y_2, x_2) \in f$ และ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $y_1 = y_2$ นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน หรือกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ $\square$

ทฤษฎีบท 6.3.4 $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $f^{-1} : B \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

บทพิสูจน์. สมมติ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 6.3.3 f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ หรือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงดังนั้น $\text{Ran}(f) = B$ จาก $\text{Dom}(f) = A$ ทำให้ได้ว่า $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f) = B$ และ $\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = A$ สรุปได้ว่า $f^{-1} : B \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $(x_1, y_1) \in f^{-1}$ และ $(x_2, y_2) \in f^{-1}$ สมมติว่า $y_1 = y_2$ เนื่องจาก $(y_1, x_1) \in f$ และ $(y_2, x_2) \in f$ และ f เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น $x_1 = x_2$ ทำให้ได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1-1 สรุปได้ว่า $f^{-1} : B \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ด้านกลับกันให้ทำเป็นแบบฝึกหัด $\square$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = f(-1)$ แต่ $1 \neq -1$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 6.3.3 สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันไม่ได้

2. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \frac{x}{x+1}$

วิธีทำ ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_1+1} &= \frac{x_2}{x_2+1} \\ x_1(x_2+1) &= x_2(x_1+1) \\ x_1x_2 + x_1 &= x_2x_1 + x_2 \\ x_1 &= x_2\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 6.3.3 สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันได้

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 2x + 1$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 6.1.7 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 6.3.4 จะได้ว่า $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง นอกจากนี้

$$\begin{aligned}(x, y) \in f^{-1} &\leftrightarrow (y, x) \in f \\ &\leftrightarrow x = 2y + 1 \\ &\leftrightarrow y = \frac{x-1}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $f^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{2} \right\}$ หรือ $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

ตัวอย่าง 6.3.6 ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x|x|$

จงแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง และหา $f^{-1}(x)$

บทพิสูจน์. 1. ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ สมมติ $x_1 \neq x_2$ แล้ว

กรณีที่ 1 $x_1 \geq 0$ และ $x_2 \geq 0$ จะได้ว่า $x_1^2 \neq x_2^2$ ดังนั้น

$$f(x_1) = x_1|x_1| = x_1^2 \neq x_2^2 = x_2|x_2| = f(x_2)$$

กรณีที่ 2 $x_1 < 0$ และ $x_2 < 0$ จะได้ว่า $-x_1^2 \neq -x_2^2$ ดังนั้น

$$f(x_1) = x_1|x_1| = -x_1^2 \neq -x_2^2 = x_2|x_2| = f(x_2)$$

กรณีที่ 3 $x_1 \geq 0$ และ $x_2 < 0$ จะได้ว่า $x_1|x_1| \geq 0$ และ $x_2|x_2| < 0$ ดังนั้น

$$f(x_2) = x_2|x_2| < 0 \leq x_1|x_1| = f(x_1)$$

กรณีที่ 4 $x_1 < 0$ และ $x_2 \geq 0$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 3

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. ให้ $y \in \mathbb{R}$

กรณีที่ 1 $y \geq 0$ เลือก $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$f(x) = f(\sqrt{y}) = \sqrt{y}|\sqrt{y}| = y$$

ดังนั้น $y \in \text{Ran}(f)$

กรณีที่ 2 $y < 0$ นั่นคือ $-y > 0$ เลือก $x = -\sqrt{-y} \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$f(x) = f(-\sqrt{-y}) = -\sqrt{-y}|\sqrt{-y}| = y$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง □

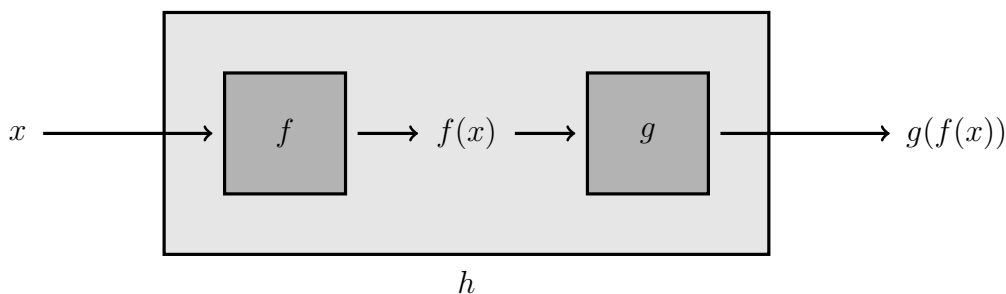
โดยทฤษฎีบท 6.3.4 $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ให้ $(x, y) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $x = y|y|$

กรณีที่ $x \geq 0$ จะได้ $y \geq 0$ ดังนั้น $y^2 = x$ หรือ $y = \sqrt{x}$

กรณีที่ $x < 0$ จะได้ $y < 0$ ดังนั้น $-y^2 = x$ หรือ $y = -\sqrt{-x}$

$$\text{ดังนั้น } f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ กำหนดโดย } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ถ้าเปรียบเทียบฟังก์ชันคือเครื่องจักรชิ้นหนึ่งเรียกว่า f เมื่อใส่ x หรือ input เข้าไปในเครื่องจะได้ $f(x)$ ออกมาตามหน้าที่ของเครื่องจักรชนิดนั้น จากแนวคิดนี้เมื่อประกอบเครื่องจักรอีกเครื่องที่เรียกว่า g อีกชิ้น โดยนำ $f(x)$ หรือ output จากเครื่องจักร f ใส่เข้าไปในเครื่องจักร g แล้วได้ผลเป็น $g(f(x))$ เรียกเครื่องจักรประกอบจากสองชิ้นนี้ว่า h ดังแผนภาพ

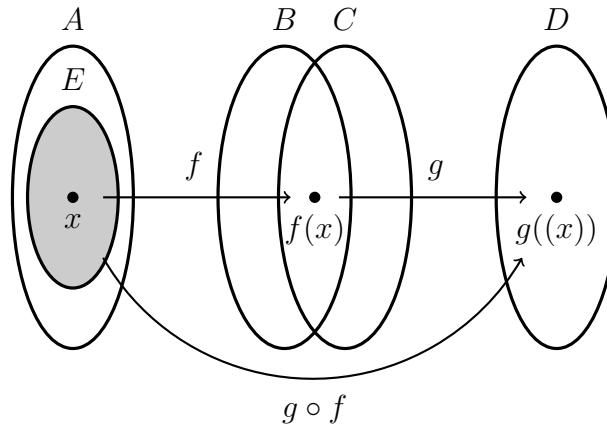


รูปที่ 30 แผนภาพแสดงเครื่องจักรที่ประกอบจาก f และ g

จะเรียกฟังก์ชัน h ที่ได้จากแนวคิดนี้ว่า **ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)** ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 6.3.7 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : C \rightarrow D$ และ $E = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ นิยามฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$ โดยที่

1. ถ้า $E = \emptyset$ แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันว่าง (Empty function)
2. ถ้า $E \neq \emptyset$ แล้ว $g \circ f : E \rightarrow D$ กำหนดโดย $g \circ f(x) = g(f(x))$



รูปที่ 31 แผนภาพแสดงฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$

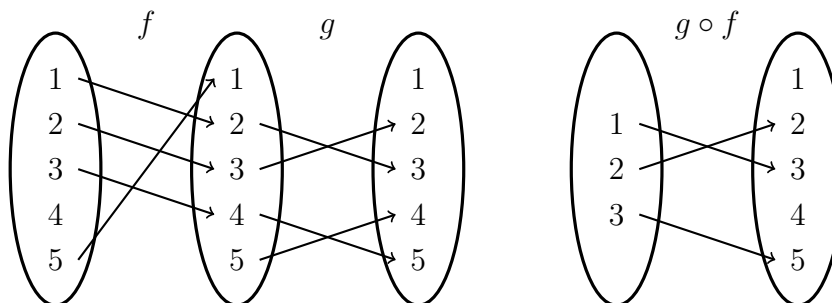
ข้อสังเกต

1. $\text{Dom}(g \circ f) = E = \{x \mid x \in \text{Dom}(f) \text{ และ } f(x) \in \text{Dom}(g)\}$
2. เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ $g \circ f$ จะสอดคล้องกับนิยามความสัมพันธ์ประกอบและเขียนได้เป็น

$$g \circ f = \{(x, z) \in A \times D \mid x \in \text{Dom}(f) \wedge \exists y \in \text{Ran}(f) \cap \text{Dom}(g), y = f(x) \wedge z = g(y)\}$$

3. กรณีที่ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ จะได้ว่า $g \circ f : A \rightarrow C$

ตัวอย่าง 6.3.8 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 1)\}$ และ $g = \{(2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$ จะได้ว่า $g \circ f = \{(1, 3), (2, 2), (3, 5)\}$ แสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 32 แผนภาพแสดงตัวอย่างฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$

ตัวอย่าง 6.3.9 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันค่าจริงโดย $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x^2$ จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของทั้งสอง

วิธีทำ พิจารณา $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้ว่า $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ และ $\text{Ran}(f) = [0, \infty)$
 สำหรับ $g(x) = x^2$ มี $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ และ $\text{Ran}(g) = [0, \infty)$ ดังนั้น

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

ทำให้ได้ว่า $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ และ $\text{Ran}(f \circ g) = [0, \infty)$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{เมื่อ } x \geq 0$$

ทำให้ได้ว่า $\text{Dom}(g \circ f) = [0, \infty)$ และ $\text{Ran}(g \circ f) = [0, \infty)$

จากตัวอย่างข้างต้นสรุปได้ว่า $f \circ g$ ไม่เท่ากับ $g \circ f$ และต้องระมัดระวังการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันประกอบโดยการพิจารณาตามนิยามและความหมายอย่างรัดกุม

ทฤษฎีบท 6.3.10 กำหนดให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ จะได้ว่า

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

บทพิสูจน์. ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ จะได้ว่า

1. สมมติ f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $x_1, x_2 \in A$ โดยที่ $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ แล้ว

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $f(x_1) = f(x_2)$ สรุปได้ว่า $x_1 = x_2$ เพราะ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. สมมติ f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $y \in C$ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $z \in B$ ซึ่ง $g(z) = y$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง นั่นคือมี $x \in A$ ซึ่ง $f(x) = z$ ดังนั้น

$$y = g(z) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

3. เป็นผลมาจาก 1 และ 2



ทฤษฎีบท 6.3.11 กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ จะได้ว่า

1. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ g เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ จะได้ว่า

1. สมมติ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $x_1, x_2 \in A$ โดยที่ $f(x_1) = f(x_2)$ เนื่องจาก $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน จะได้

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

เนื่องจาก $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $x_1 = x_2$ สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. สมมติ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $y \in C$ จะได้ว่ามี $x \in A$ ซึ่ง $g \circ f(x) = y$ ดังนั้น $f(x) \in B$ และ

$$g(f(x)) = g \circ f(x) = y$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

3. เป็นผลมาจาก 1 และ 2

□

บทนิยาม 6.3.12 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity function) บน A คือฟังก์ชัน

$$i_A : A \rightarrow A \text{ นิยามโดย } i_A(x) = x$$

ตัวอย่าง 6.3.13 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ และ $A = \text{Dom}(f)$ จงแสดงว่า $f = f^{-1}$ และ $f \circ f = i_A$

วิธีทำ เห็นได้ชัดว่า $A = \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $x_1, x_2 \in A$ สมมติว่า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2}$$

$$(1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1)$$

$$1+x_2-x_1-x_1x_2 = 1+x_1-x_2-x_1x_2$$

$$2x_2 = 2x_1$$

$$x_2 = x_1$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 6.3.3 f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ และ $(x, y) \in f^{-1}$ สอดคล้อง

$$\begin{aligned}x &= \frac{1-y}{1+y} \\x(1+y) &= 1-y \\x+xy &= 1-y \\xy+y &= 1-x \\y(1+x) &= 1-x \\y &= \frac{1-x}{1+x}\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = A$ และ $f(x) = f^{-1}(x)$ ทุก ๆ $x \in A$ ดังนั้น $f = f^{-1}$ สำหรับ $x \in A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f \circ f(x) &= f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \\&= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{2x}{1+x}}{\frac{2}{1+x}} \\&= x = i_A(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f = i_A$

ทฤษฎีบท 6.3.14 ให้ $f: A \rightarrow B$ แล้ว

1. $f \circ i_A = f$
2. $i_B \circ f = f$

บทพิสูจน์. ให้ $f: A \rightarrow B$

1. เนื่องจาก $i_A: A \rightarrow A$ จะได้ $\text{Dom}(f \circ i_A) = A = \text{Dom}(f)$ ให้ $x \in A$ จะได้ว่า

$$f \circ i_A(x) = f(i_A(x)) = f(x)$$

ดังนั้น $f \circ i_A = f$

2. เนื่องจาก $i_B: B \rightarrow B$ จะได้ $\text{Dom}(i_B \circ f) = A = \text{Dom}(f)$ ให้ $x \in A$ จะได้ว่า

$$i_B \circ f(x) = i_B(f(x)) = f(x)$$

ดังนั้น $i_B \circ f = f$



ทฤษฎีบท 6.3.15 ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จะได้ว่า

$$1. f \circ f^{-1} = i_B$$

$$2. f^{-1} \circ f = i_A$$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 6.3.4 จะได้ว่า $f^{-1} : B \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

1. จะได้ว่า $f \circ f^{-1} : B \rightarrow B$ แล้ว $\text{Dom}(f \circ f^{-1}) = B = \text{Dom}(i_B)$ ให้ $x \in B$ นั่นคือมี $z \in A$ ซึ่ง $f^{-1}(x) = z$ ดังนั้น $f(z) = x$ จะได้ว่า

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(z) = x = i_B(x)$$

$$\text{ดังนั้น } f \circ f^{-1} = i_B$$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

ทฤษฎีบท 6.3.16 ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันได้ และ $(f^{-1})^{-1} = f$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ โดยทฤษฎีบท 6.3.3 f เป็นฟังก์ชัน 1-1

ดังนั้น $f^{-1} : \text{Ran}(f) \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จะได้ว่า $\text{Dom}((f^{-1})^{-1}) = A = \text{Dom}(f)$ ให้ $x \in A$ จะได้ว่ามี $y \in B$ ซึ่ง $f(x) = y$ นั่นคือ $f^{-1}(y) = x$ แล้ว

$$(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x)$$

$$\text{ดังนั้น } (f^{-1})^{-1} = f$$

□

ทฤษฎีบท 6.3.17 กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จะได้ว่า

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

บทพิสูจน์. สมมติ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 6.3.10 จะได้ว่า f, g และ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ฉะนั้น f^{-1}, g^{-1} และ $(g \circ f)^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 6.3.4 เห็นได้ชัดว่า $\text{Dom}((g \circ f)^{-1}) = C = \text{Dom}(f^{-1} \circ g^{-1})$

สำหรับ $x \in C$ จะได้ว่ามี $y \in B$ ซึ่ง $g^{-1}(x) = y$ จะได้ว่ามี $z \in A$ ซึ่ง $f^{-1}(y) = z$ ดังนั้น

$$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(y) = z$$

จาก $f^{-1}(y) = z$ จะได้ $f(z) = y$ ฉะนั้น $g \circ f(z) = g(f(z)) = g(y) = x$ ดังนั้น

$$(g \circ f)^{-1}(x) = z$$

สรุปได้ว่า $(g \circ f)^{-1}(x) = z = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$ นั่นคือ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

□

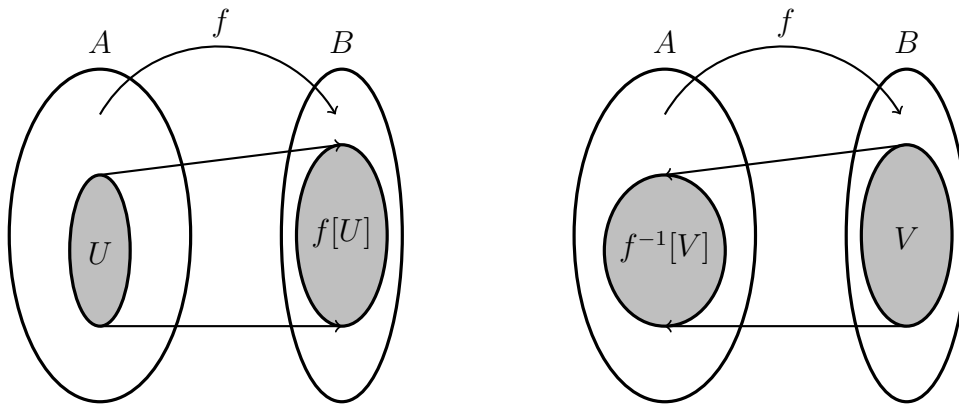
6.4 ภาพและภาพผกผัน

บทนิยาม 6.4.1 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $U \subseteq A$ นิยาม **ภาพ (Image)** ของ U ภายใต้ f เขียนแทนด้วย $f[U]$ กำหนดโดย

$$f[U] = \{y \in B \mid \exists x \in U, f(x) = y\}$$

และ $V \subseteq B$ นิยาม **ภาพผกผัน (Inverse image)** ของ V ภายใต้ f เขียนแทนด้วย $f^{-1}[V]$ กำหนดโดย

$$f^{-1}[V] = \{x \in A \mid f(x) \in V\}$$



รูปที่ 33 แผนภาพแสดงภาพและภาพผกผัน

จากบทนิยามข้างต้นจะได้ข้อสังเกตดังต่อไปนี้

1. $f[\emptyset] = \emptyset$ และ $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$
2. $f[U] \subseteq \text{Ran}(f)$ และ $f[A] = \text{Ran}(f)$
3. $f^{-1}[V] \subseteq \text{Dom}(f)$ และ $f^{-1}[B] = \text{Dom}(f)$
4. $y \in f[U]$ ก็ต่อเมื่อ $\exists x \in U, y = f(x)$
5. $x \in f^{-1}[V]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) \in V$

ตัวอย่าง 6.4.2 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ กำหนดฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ โดย

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, a), (5, c)\}$$

จะได้ว่า

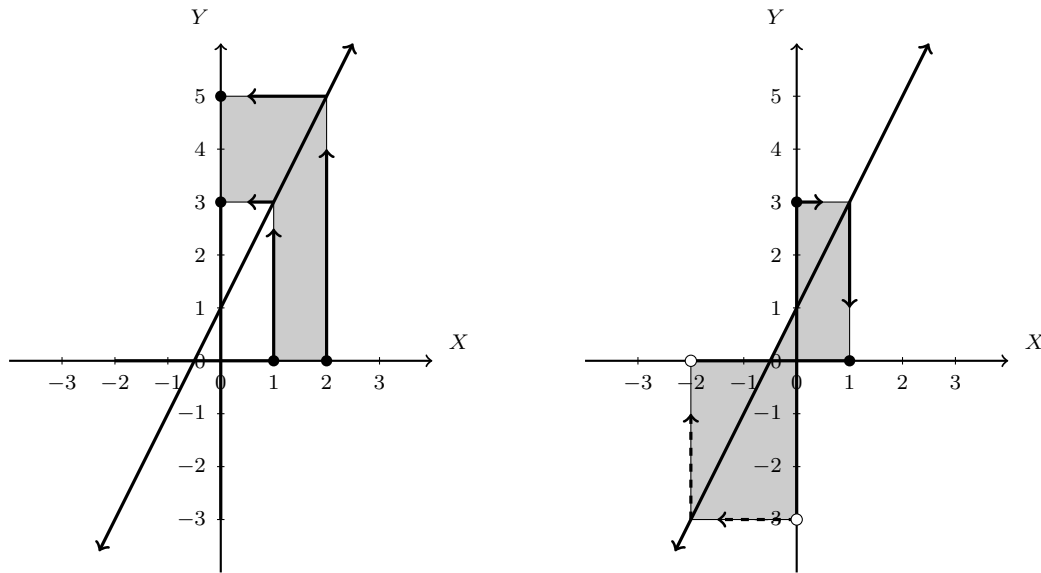
- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $f[\{1, 2\}] = \{a\}$ | 4. $f^{-1}[\{a, c\}] = \{1, 2, 4, 5\}$ |
| 2. $f[\{2, 4, 5\}] = \{a, c\}$ | 5. $f^{-1}[\{b, c, d\}] = \{3, 5\}$ |
| 3. $f[A] = \{a, b, c\}$ | 6. $f^{-1}[B] = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$ |

ตัวอย่าง 6.4.3 ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2 - 1$ จะได้ว่า

1. $f[\{0, 1, 2, 3\}] = \{-1, 0, 3, 8\}$
2. $f[\{-3, -2, 2, 3\}] = \{8, 3\}$
3. $f^{-1}[\{0, 1, 3\}] = \{-2, -1, 1, 0, 2\}$
4. $f^{-1}[\{-4, -3, -2\}] = \emptyset$

ตัวอย่าง 6.4.4 ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = 2x + 1$ จงหา $f[[1, 2]]$ และ $f^{-1}[(-3, 3)]$

วิธีทำ แสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้

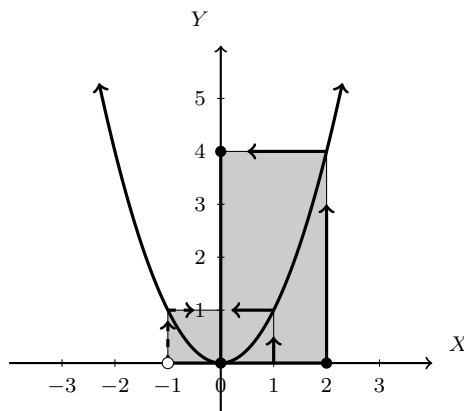


จากกราฟจะได้ว่า $f[[1, 2]] = [3, 5]$ และ $f^{-1}[(-3, 3)] = (-2, 1]$

ตัวอย่าง 6.4.5 ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

1. $f[(-1, 2)]$

วิธีทำ แสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



ดังนั้น $f[(-1, 2)] = [0, 4]$

บทพิสูจน์. ให้ $y \in f[(-1, 2)]$ จะได้ว่ามี $x \in (-1, 2]$ ซึ่ง $f(x) = y$ นั่นคือ $y = x^2$ เนื่องจาก $-1 < x \leq 2$ ดังนั้น

$$0 \leq x^2 \leq 4$$

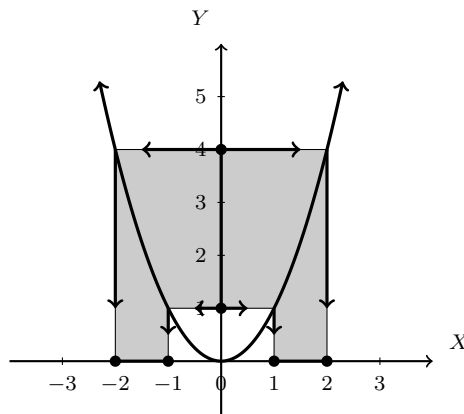
$$0 \leq y \leq 4$$

ทำให้ได้ว่า $y \in [0, 4]$ ดังนั้น $f[(-1, 2)] \subseteq [0, 4]$ ในทางกลับกันให้ $y \in [0, 4]$ นั่นคือ $0 \leq y \leq 4$ ดังนั้น $0 \leq \sqrt{y} \leq 2$ เลือก $x = \sqrt{y}$ จะได้ว่า $x \in [0, 2] \subseteq (-1, 2]$ และ

$$f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

ดังนั้น $y \in f[(-1, 2)]$ นั่นคือ $[0, 2] \subseteq f[(-1, 2)]$ ทำให้สรุปได้ว่า $f[(-1, 2)] = [0, 4]$ □

2. $f^{-1}[[1, 4]]$



ดังนั้น $f^{-1}[[1, 4]] = [-2, -1] \cup [1, 2]$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in f^{-1}[[1, 4]]$ จะได้ว่า $f(x) \in [1, 4]$ นั่นคือ

$$1 \leq f(x) \leq 4$$

$$1 \leq x^2 \leq 4$$

$$1 \leq |x| \leq 2$$

แล้ว $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ ดังนั้น $f^{-1}[[1, 4]] \subseteq [-2, -1] \cup [1, 2]$ ในทางกลับกันให้ $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ กรณีที่ $-2 \leq x \leq -1$ จะได้ว่า $1 \leq x^2 \leq 4$ ดังนั้น $f(x) \in [1, 4]$ และกรณีที่ $1 \leq x \leq 2$ จะได้ว่า $1 \leq x^2 \leq 4$ ดังนั้น $f(x) \in [1, 4]$ จะได้ว่า $[-2, -1] \cup [1, 2] \subseteq f^{-1}[[1, 4]]$ ทำให้สรุปได้ว่า $f^{-1}[[1, 4]] = [-2, -1] \cup [1, 2]$ □

ทฤษฎีบท 6.4.6 ให้ $f : A \rightarrow B$ จะได้ว่า

1. สมมติ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq A$ ถ้า $X \subseteq Y$ แล้ว $f[X] \subseteq f[Y]$
2. สมมติ $C \subseteq B$ และ $D \subseteq B$ ถ้า $C \subseteq D$ แล้ว $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$

1. สมมติ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq A$ โดยที่ $X \subseteq Y$ ให้ $y \in f[X]$ จะได้ว่ามี $x \in X$ ซึ่ง $f(x) = y$ เนื่องจาก $X \subseteq Y$ ดังนั้น $x \in Y$ ทำให้ได้ว่า $y \in f[Y]$ สรุปได้ว่า $f[X] \subseteq f[Y]$
2. สมมติ $C \subseteq B$ และ $D \subseteq B$ โดยที่ $C \subseteq D$ ให้ $x \in f^{-1}[C]$ จะได้ว่า $f(x) \in C \subseteq D$ ดังนั้น $f(x) \in D$ ทำให้ได้ว่า $x \in f^{-1}[D]$ สรุปได้ว่า $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$

□

ทฤษฎีบท 6.4.7 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq A$ จะได้ว่า

1. $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$
2. $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq A$

1. ให้ $b \in f[X \cup Y]$ จะได้ว่ามี $a \in X \cup Y$ ซึ่ง $f(a) = b$
 ถ้า $a \in X$ จะได้ว่า $b \in f[X] \subseteq f[X] \cup f[Y]$
 ถ้า $a \in Y$ จะได้ว่า $b \in f[Y] \subseteq f[X] \cup f[Y]$
 ดังนั้น $f[X \cup Y] \subseteq f[X] \cup f[Y]$ ในทางกลับกันให้ $b \in f[X] \cup f[Y]$
 ถ้า $b \in f[X]$ จะได้ว่ามี $a \in X \subseteq X \cup Y$ ซึ่ง $f(a) = b$ นั่นคือ $b \in f[X \cup Y]$
 ถ้า $b \in f[Y]$ จะได้ว่ามี $a \in Y \subseteq X \cup Y$ ซึ่ง $f(a) = b$ นั่นคือ $b \in f[X \cup Y]$
 ดังนั้น $f[X] \cup f[Y] \subseteq f[X \cup Y]$ สรุปได้ว่า $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$
2. ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

ทฤษฎีบท 6.4.8 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $A_\alpha \subseteq A$ ทุก ๆ $\alpha \in \Lambda$ จะได้ว่า

1. $f\left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f[A_\alpha]$
2. $f\left[\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right] \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} f[A_\alpha]$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $A_\alpha \subseteq A$ ทุก ๆ $\alpha \in \Lambda$

1. ให้ $y \in f \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right]$ แล้วจะได้ว่ามี $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ ซึ่ง $f(x) = y$ นั่นคือมี $\alpha_0 \in \Lambda$ ซึ่ง $x \in A_{\alpha_0}$ ดังนั้น $y \in f[A_{\alpha_0}]$ ทำให้ได้ว่า $y \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f[A_\alpha]$ ในทางกลับกันให้ $b \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f[A_\alpha]$ จะได้ว่ามี $\alpha_1 \in \Lambda$ ซึ่ง $b \in f[A_{\alpha_1}]$ ดังนั้น $f(a) = b$ สำหรับบาง $a \in A_{\alpha_1} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ ดังนั้น $b \in f \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right]$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด



ทฤษฎีบท 6.4.9 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $C \subseteq B$ และ $D \subseteq B$ จะได้ว่า

1. $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$
2. $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $C \subseteq B$ และ $D \subseteq B$

1. สำหรับ $x \in A$ ใด ๆ

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}[C \cup D] & \leftrightarrow f(x) \in C \cup D \\
 & \leftrightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D \\
 & \leftrightarrow x \in f^{-1}[C] \vee x \in f^{-1}[D] \\
 & \leftrightarrow x \in f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]
 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด



ทฤษฎีบท 6.4.10 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $B_\alpha \subseteq B$ ทุก ๆ $\alpha \in \Lambda$ จะได้ว่า

1. $f^{-1} \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right] = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}[B_\alpha]$
2. $f^{-1} \left[\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right] = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}[B_\alpha]$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $B_\alpha \subseteq B$ ทุก ๆ $\alpha \in \Lambda$

1. ทำเป็นแบบฝึกหัด
2. สำหรับ x ใด ๆ

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1} \left[\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right] &\leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \\
 &\leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda, f(x) \in B_\alpha \\
 &\leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda, x \in f^{-1}[B_\alpha] \\
 &\leftrightarrow \forall x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}[B_\alpha]
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f^{-1} \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right] = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}[B_\alpha]$$

□

ทฤษฎีบท 6.4.11 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq B$ จะได้ว่า

1. $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$
2. $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq B$

1. ให้ $x \in X$ จะได้ว่า $f(x) \in f[X]$ นั่นคือ $x \in f^{-1}[f[X]]$ สรุปได้ว่า $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$
2. ให้ $y \in f[f^{-1}[Y]]$ จะได้ว่ามี $x \in f^{-1}[Y]$ ซึ่ง $f(x) = y$ นั่นคือ $f(x) \in Y$ ทำให้ได้ว่า $y \in Y$ สรุปได้ว่า $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$

□

ทฤษฎีบท 6.4.12 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $X \subseteq A$ และ $Y \subseteq B$ จะได้ว่า

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว $f^{-1}[f[X]] = X$
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f[f^{-1}[Y]] = Y$

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

ทฤษฎีบท 6.4.13 ให้ $f : A \rightarrow B$ จะได้ว่า

ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $B - f[C] \subseteq f[A - C]$ ทุก ๆ $C \subseteq A$

บทพิสูจน์. สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $C \subseteq A$ ให้ $y \in B - f[C]$ จะได้ว่า $y \in B$ แต่ $y \notin f[C]$ ดังนั้นมี $x \in A$ ซึ่ง $f(x) = y$ ดังนั้น $f(x) \notin f[C]$ นั่นคือ $x \notin C$ ทำให้ได้ว่า $x \in A - C$ สรุปได้ว่า $y \in f[A - C]$ พิสูจน์กลับโดยสมมติว่า $B - f[C] \subseteq f[A - C]$ ทุก ๆ $C \subseteq A$ เลือก $C = A$ จะได้ว่า $B - f[A] = f[A - A] = f[\emptyset] = \emptyset$ นั่นคือ $B \subseteq f[A]$ เนื่องจาก $f[A] \subseteq B$ สรุปได้ว่า $f[A] = B$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

□

6.5 การดำเนินการทวิภาค

หลายคนคงคุ้นเคยกับการดำเนินการต่าง ๆ เช่น การบวก การลบ การคูณ และการหาร ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามของการเนนการให้อยู่ในรูปทั่วไปที่เรียกว่า การดำเนินการทวิภาค (Binary operation) ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งโดยนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 6.5.1 ให้ G เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้ว $*$ เป็น การดำเนินการทวิภาค บนเซต G ก็ต่อเมื่อ

$$* : G \times G \rightarrow G$$

นิยามเขียน $a * b = c$ แทน $*(a, b) = c$

ตัวอย่าง 6.5.2 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการดำเนินการทวิภาคที่คุ้นเคย เช่น

1. $+$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ เขียน $a + b$ แทน $+(a, b)$
2. $\times$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ เขียน $a \times b$ แทน $\times((a, b))$
3. $\cup$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเอกภพสัมพัทธ์ เขียน $A \cap B$ แทน $\cap((A, B))$
4. $\wedge$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของประพจน์ เขียน $p \wedge q$ แทน $\wedge((p, q))$

ตัวอย่าง 6.5.3 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนนับ โดย

$$a * b = \frac{1}{2}(a + b)(a + b - 1)$$

จะได้ว่า

1. $3 * 2 = \frac{1}{2}(3 + 2)(3 + 2 - 1) = 10$
2. $2 * 3 = \frac{1}{2}(2 + 3)(2 + 3 - 1) = 10$
3. $1 * (2 * 3) = 1 * 10 = \frac{1}{2}(1 + 10)(1 + 10 - 1) = 55$
4. $(1 * 2) * 3 = \left(\frac{1}{2}(1 + 2)(1 + 2 - 1) \right) * 3 = 3 * 3 = \frac{1}{2}(3 + 3)(3 + 3 - 1) = 15$

ตัวอย่าง 6.5.4 สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ กำหนดให้ $x * y$ ที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

- (1) $x * (xy) = (x * x)y$
- (2) $x * (1 * x) = 1 * x$
- (3) $1 * 1 = 1$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากเงื่อนไขที่ (1) แทน x ด้วย 1 จะได้ว่า $1 * y = (1 * 1)y = (1)y = y$ ดังนั้น

$$1 * y = y \quad \text{ทุก ๆ จำนวนจริงบวก } y$$

จากเงื่อนไข (2) จะได้ว่า สำหรับ x เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ แล้ว

$$x * (1 * x) = 1 * x$$

$$x * x = x$$

จาก (1) จะได้ว่า $x * (xy) = (x * x)y = xy$ ดังนั้น $x * xy = xy$ ทุก ๆ จำนวนจริงบวก x และ y ดังนั้น

$$5 * 6 = 5 * 5 \cdot \frac{6}{5} = 5 \cdot \frac{6}{5} = 6$$

$$5 * (5 * 6) = 5 * 6 = 6$$

$$\therefore 2 * (5 * (5 * 6)) = 2 * 6 = 2 * 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$$

ต่อไปจะกล่าวถึงการสร้าง **ตารางเคย์เลย์ (Cayley table)** สำหรับการดำเนินการบนเซตจำกัดเพื่อให้แสดงถึงค่าต่าง ๆ ที่เกิดจากการดำเนินการที่กำหนดให้ โดยมีหลักว่าตัวดำเนินการตัวหน้ากำหนดไว้เป็นหลักแรกและตัวดำเนินการตัวหลังกำหนดไว้แถวบนสุด และผลการดำเนินการคือส่วนตารางที่เกิดการจากตัวหน้าและตัวหลัง ดังตัวอย่าง * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต $\{a, b, c\}$

*	a	b	c
a	$a * a$	$a * b$	$a * c$
b	$b * a$	$b * b$	$b * c$
c	$c * a$	$c * b$	$c * c$

สำหรับการบวกและการคูณบนเซต $\{1, 2, 3\}$ เขียนตารางเคย์เลย์ได้ดังนี้

+	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

$\times$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

ตัวอย่าง 6.5.5 ให้ * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต $\{-2, 0, 2\}$ นิยามโดย

$$a * b = \frac{1}{2}(a + b)$$

สร้างตารางเคย์เลย์ได้ดังนี้

*	-2	0	2
-2	-2	-1	0
0	-1	0	1
2	0	1	2

ตัวอย่าง 6.5.6 ตารางเคย์เลย์ของการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$ คือ

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

จากตารางเคย์เลย์จะได้ว่า

- $(1 * 2) * (3 * 2) = 2 * 4 = 3$
- $(4 * 4) * (3 * 3) = 1 * 1 = 1$
- $1 * (2 * (3 * 4)) = 1 * (2 * 2) = 1 * 1 = 1$

บทนิยาม 6.5.7 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G และให้ $A \subseteq G$ ถ้า

$$\forall a, b \in A, \quad a * b \in A$$

แล้วจะกล่าวว่า เซต A มี**สมบัติปิด** (Closed) ภายใต้ $*$ หรือ $*$ มีสมบัติปิดบนเซต A

เห็นได้ว่าการบวกและการคูณมีสมบัติปิดบนเซตจำนวนจริง จำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 6.5.8 ให้ $\mathbb{E} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ และ $\mathbb{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$ จะเห็นได้ว่า

- เซตของจำนวนคู่ $\mathbb{E}$ มีสมบัติปิดภายใต้การบวก และการคูณ
- เซตของจำนวนคี่ $\mathbb{O}$ มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ แต่ไม่มีสมบัติปิดภายใต้การบวก

ตัวอย่าง 6.5.9 พิจารณาการดำเนินการต่อไปนี้

- กำหนดให้ $a * b = a + b + 1$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{N}$ แล้ว $*$ มีสมบัติปิดบนเซตของจำนวนนับเนื่องจาก
สัจพจน์ที่ว่าผลบวกของจำนวนนับย่อมเป็นจำนวนนับ
- กำหนดให้ $a * b = a + b - 2$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{N}$ แล้ว $*$ ไม่มีสมบัติปิดบนเซตของจำนวนนับเนื่องจาก
 $1 * 1 = 1 + 1 - 2 = 0 \notin \mathbb{N}$

สามารถตรวจสอบสมบัติปิดโดยใช้ตารางเคย์เลย์ได้ดังนี้ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.5.10 กำหนดให้ $a * b = \sqrt[3]{ab}$ เมื่อ $a, b \in \{-1, 0, 1\}$

$*$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

จากตารางเคย์เลย์เห็นได้ชัดว่า $*$ มีสมบัติปิดบนเซต $\{-1, 0, 1\}$

ตัวอย่าง 6.5.11 กำหนดให้ $A = \{1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1\}$ กับการคูณ จะได้ว่า

$\times$	1	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$
1	1	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$
$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} - 1$	$3 - 2\sqrt{2}$	1
$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} + 1$	1	$3 + 2\sqrt{2}$

จากตารางเคย์เลย์ ทำให้ได้ว่า A ไม่มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ

บทนิยาม 6.5.12 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ถ้า

$$\forall a, b \in G, \quad a * b = b * a$$

แล้วจะกล่าวว่า เซต G มี**สมบัติสลับที่ (Commutative law)** ภายใต้ $*$ หรือ $*$ มีสมบัติสลับที่บนเซต G

เห็นได้ว่าการบวกและการคูณมีสมบัติการสลับที่บนเซตจำนวนจริง จำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 6.5.13 พิจารณาการดำเนินการทวิภาคต่อไปนี้

- กำหนดให้ $a * b = a + b + 5$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $a * b = a + b + 5 = b + a + 5 = b * a$ ดังนั้น $\mathbb{N}$ มีสมบัติสลับที่ภายใต้ $*$

- กำหนดให้ $a * b = a^2 + ab$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก $2 * 3 = 2^2 + 2(3) = 10 \neq 15 = 3^2 + 3(2) = 3 * 2$ ดังนั้น $\mathbb{N}$ ไม่มีสมบัติสลับที่ภายใต้ $*$

การตรวจสอบสมบัติสลับที่จากตารางเคย์เลย์ ทำได้โดยลากเส้นผ่านแนวทแยงจากซ้ายบนไปยังขวาล่างถ้าค่าแต่ละค่าในตารางสมมาตรกันผ่านเส้นทแยงจะได้สรุปได้ว่าการดำเนินการนั้นมีสมบัติสลับที่

ตัวอย่าง 6.5.14 กำหนดตารางเคย์เลย์ของการดำเนินการทวิภาค $*$

- นิยาม $*$ บน $G_1 = \{0, 1, 2\}$ ดังนี้

$*$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	1	2
2	1	2	2

- นิยาม $\star$ บน $G_2 = \{1, 2, 3\}$ ดังนี้

$\star$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

เห็นได้ชัดว่าข้อ 1 ตารางไม่สมมาตรผ่านเส้นทแยง แต่ข้อ 2 มีความสมมาตรผ่านเส้นทแยง ดังนั้น $*$ ไม่มีสมบัติสลับที่บน G_1 แต่ $\star$ มีสมบัติสลับที่บน G_2

บทนิยาม 6.5.15 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ถ้า

$$\forall a, b, c \in G, \quad a * (b * c) = (a * b) * c$$

แล้วจะกล่าวว่า เซต G มี**สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative law)** ที่ภายใต้ $*$ หรือ $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบนเซต G

เห็นได้ว่าการบวกและการคูณมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบนเซตจำนวนจริง จำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 6.5.16 จงตรวจสอบสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการดำเนินการทวิภาคบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $a * b = a + b + 1$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{N}$

วิธีทำ ให้ $a, b, c \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c + 1) \\ &= a + (b + c + 1) + 1 \\ &= (a + b + 1) + c + 1 \\ &= (a * b) + c + 1 \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบน $\mathbb{N}$

2. กำหนดให้ $a * b = a - b - ab$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 1 * (2 * 3) &= 1 * (2 - 3 - 2 \cdot 3) = 1 * (-7) = 1 - (-7) - 1 \cdot (-7) \\ &= 15 \\ &\neq -3 = -3 - 3 - (-3) \cdot 3 = -3 * 3 \\ &= (1 - 2 - 1 \cdot 2) * 3 = (1 * 2) * 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบน $\mathbb{Z}$

บทนิยาม 6.5.17 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ถ้ามี $e \in G$ ซึ่งสอดคล้อง

$$\forall a \in G, \quad a * e = a = e * a$$

แล้วจะกล่าวว่า เซต G มี e เป็น **เอกลักษณ์ (Identity)** ภายใต้ $*$

สำหรับเซตจำนวนจริงการบวกมี 0 เป็นเอกลักษณ์ และการคูณมี 1 เป็นเอกลักษณ์

ตัวอย่าง 6.5.18 จากตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3
1	1	1	2
2	1	2	3
3	2	3	3

จะได้ว่า 2 เป็นเอกลักษณ์เนื่องจาก $2 * a = a = a * 2$ ทุก $a \in \{1, 2, 3\}$

ตัวอย่าง 6.5.19 จงหาเอกลักษณ์ (ถ้ามี) ของการดำเนินการบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. ให้ $a * b = a + b - 7$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก $7 \in \mathbb{Z}$ และ $7 * a = 7 + a - 7 = a = a + 7 - 7 = 7 * a$ ทุก ๆ $a \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น 7 เป็นเอกลักษณ์

2. ให้ $a * b = 7ab$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะแสดงว่า * ไม่มีเอกลักษณ์บนจำนวนเต็ม สมมติว่ามี $e \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$a * e = a = e * a \quad \text{สำหรับทุก ๆ } a \in \mathbb{Z}$$

นั่นคือ $7ae = a$ หรือ $a(7e - 1) = 0$ เลือก $a = 1$ จะได้ว่า $7e = 1$ นั่นคือ $7 \mid 1$ เกิดข้อขัดแย้ง สรุปได้ว่า * ไม่มีเอกลักษณ์บน $\mathbb{Z}$

ข้อสังเกต * มีเอกลักษณ์บน $\mathbb{R}$ โดยมีเอกลักษณ์คือ $\frac{1}{7}$

3. ให้ $a * b = a - 2b$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Q}$ จะแสดงว่า * ไม่มีเอกลักษณ์บนจำนวนเต็ม สมมติว่ามี $e \in \mathbb{Q}$ ซึ่ง

$$a * e = a = e * a \quad \text{สำหรับทุก ๆ } a \in \mathbb{Q}$$

นั่นคือ $a = a - 2e$ ดังนั้น $e = 0$ แต่ $e * a = 0 * a = 0 - 2a = -2a \neq a$ เมื่อ $a \neq 0$ เกิดข้อขัดแย้ง สรุปได้ว่า * ไม่มีเอกลักษณ์บน $\mathbb{Q}$

ทฤษฎีบท 6.5.20 ถ้า G มีเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ * จะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทพิสูจน์. ให้ e_1 และ e_2 เป็นเอกลักษณ์ของ G ภายใต้ * สำหรับทุก ๆ $a \in G$ จะได้ว่า

$$e_1 * a = a = a * e_1 \quad \text{และ} \quad e_2 * a = a = a * e_2$$

เนื่องจาก $e_2 \in G$ ดังนั้น $e_1 * e_2 = e_2$ และเนื่องจาก $e_1 \in G$ ดังนั้น $e_1 = e_1 * e_2$ นั่นคือ

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

สรุปได้ว่า G มีเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ * เพียงตัวเดียวเท่านั้น □

บทนิยาม 6.5.21 ให้ * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ที่มี e เป็นเอกลักษณ์ ถ้า $a \in G$ และ

$$\exists b \in G, \quad a * b = e = b * a$$

จะกล่าวว่า b ว่า **ตัวผกผัน (Inverse)** ของ a เขียนสัญลักษณ์ด้วย a^{-1}

ตัวอย่าง 6.5.22 จงหาตัวผกผัน (ถ้ามี) ของสมาชิกทุกตัวจากตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	3

จากตารางจะได้ว่า 1 เป็นเอกลักษณ์ จะเห็นว่า 1 และ 2 ตัวผกผันคือ 1 และ 2 ตามลำดับ แต่ 3 ไม่มีตัวผกผัน

ตัวอย่าง 6.5.23 กำหนดให้ $a * b = a + b - 7$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{Z}$

จากตัวอย่าง 6.5.19 จะได้ว่า 7 เป็นเอกลักษณ์

เนื่องจาก $2 * 12 = 2 + 12 - 7 = 7 = 12 + 2 - 7 = 12 * 2$ ดังนั้น 12 เป็นตัวผกผันของ 2

เนื่องจาก $-5 * 19 = -5 + 19 - 7 = 7 = 19 + (-5) - 7 = 19 * (-5)$ ดังนั้น 19 เป็นตัวผกผันของ -5 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

$$a * (14 - a) = a + (14 - a) - 7 = 7 = (14 - a) + a - 7 = (14 - a) * a$$

ดังนั้น $14 - a$ เป็นตัวผกผันของ a

ตัวอย่าง 6.5.24 ให้ $G = \{-1, 1, -i, i\}$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ กับการคูณ แสดงตารางเคย์เลย์ได้ดังนี้

$\times$	-1	1	-i	i
-1	1	-1	i	-i
1	-1	1	-i	i
-i	i	-i	-1	1
i	-i	i	1	-1

จะได้ว่า 1 เป็นเอกลักษณ์ ดังนั้น $-1, 1, -i$ และ i มีตัวผกผันคือ $-1, 1, i$ และ $-i$ ตามลำดับ

6.6 การจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันมีบทบาทสำคัญในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับสูง ทำให้ถูกบรรจุในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยเนื้อหาจะเน้นไปที่ความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชัน และการนำไปใช้อธิบายสถานการณ์และใช้แก้ปัญหา ในการเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และมัธยมศึกษาปีที่ 4 สายที่เน้นวิทยาศาสตร์ และมัธยมศึกษาปีที่ 5 สายไม่เน้นวิทยาศาสตร์ ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปแบบ ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
ม.3	2. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเกี่ยวกับฟังก์ชันกำลังสองในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	ฟังก์ชันกำลังสอง - กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง - การนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันกำลังสองไปใช้ในการแก้ปัญหา
ม.5 ไม่เน้น วิทยาศาสตร์	1. ใช้ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันอธิบายสถานการณ์ที่กำหนด	ฟังก์ชัน - ฟังก์ชันและกราฟ (ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันขั้นบันได ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล)
ม.4 เน้น วิทยาศาสตร์	1. ใช้ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันอธิบายสถานการณ์ที่กำหนด 2. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน 3. ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา	ฟังก์ชัน - ฟังก์ชันและกราฟฟังก์ชัน - การบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน - ฟังก์ชันประกอบ - ฟังก์ชันผกผัน

ตารางที่ 28 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางของเรื่องฟังก์ชัน

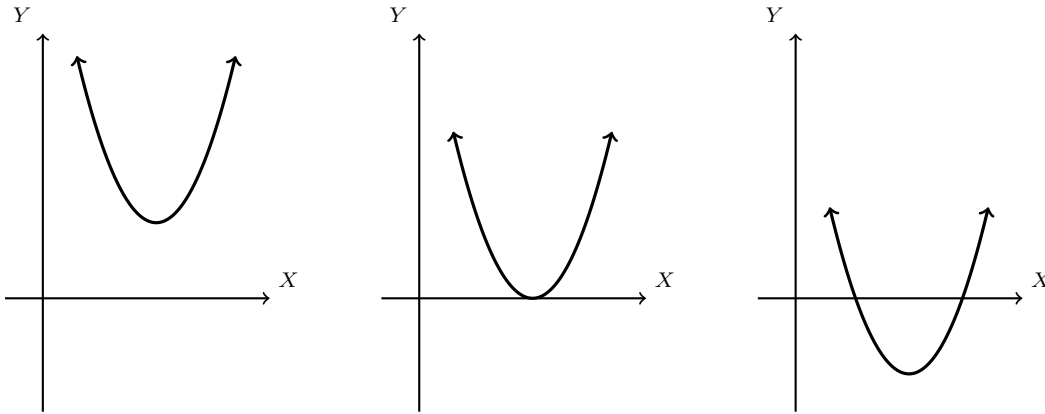
ตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E

ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการสอนสาระการเรียนรู้ "ความสัมพันธ์ระหว่างรากของสมการกำลังสองกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง" โดยการให้กราฟของฟังก์ชันกำลังสองในรูปแบบต่าง ๆ และตั้งคำถามถึงความสัมพันธ์กับสมการกำลังสอง ซึ่งทำได้ 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นสร้างความสนใจ

นำเข้าสู่บทเรียนโดยทบทวนฟังก์ชันกำลังสอง และอธิบายเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปคือ $f(x) = ax^2 + bx + c$ และรูปแบบมาตรฐาน $f(x) = a(x - h)^2 + k$ โดยแสดง

กราฟให้นักเรียน และถามเพื่อทบทวนรูปแบบต่าง ๆ และส่วนประกอบของกราฟ เช่น จุดยอด เส้นสมมาตร ลักษณะของกราฟ (หงาย หรือ คว่ำ) ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด



แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3 คน พร้อมให้บัตรคำถามของสมการกำลังสองทั้ง 3 รูปแบบ พร้อมแจกกระดาษกราฟกลุ่มละ 1 แผ่น ตัวอย่างคำถาม 3 ข้อ เช่น

ข้อ 1: $x^2 + x + 1 = 0$ ข้อ 2: $x^2 - 2x + 1 = 0$ และ ข้อ 3: $x^2 - x - 2 = 0$

2. ขั้นสำรวจค้นหา

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาคำตอบ พร้อมทั้งเขียนกราฟกำลังสองจากสมการ จากตัวอย่างทั้ง 3 ข้อที่ให้ได้ จะเขียนกราฟของ

ข้อ 1: $y = x^2 + x + 1$ ข้อ 2: $y = x^2 - 2x + 1$ และ ข้อ 3: $y = x^2 - x - 2$

ใช้เวลา 15 นาทีในการทำกิจกรรมดังกล่าว โดยให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของจำนวนรากของสมการกำลังสองกับกราฟ 3 รูปแบบ

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

ให้แต่ละกลุ่มข้อสรุปคำตอบ และออกมาอภิปรายคำตอบที่ได้ แล้วนักเรียนในชั้นสรุปความคิดรวบยอดของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ สรุปได้ดังนี้

- กรณี $b^2 - 4ac > 0$ สมการกำลังสองมีรากของสมการเป็นจำนวนจริง 2 ราก กราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะตัดแกน X ทั้งหมด 2 จุด
- กรณี $b^2 - 4ac = 0$ สมการกำลังสองมีรากของสมการเป็นจำนวนจริง 1 ราก กราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะตัดแกน X ทั้งหมด 1 จุด คือจุดยอด
- กรณี $b^2 - 4ac < 0$ สมการกำลังสองไม่มีรากของสมการเป็นจำนวนจริง กราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะไม่ตัดแกน X

4. ขั้้นขยายความรู้

ครูแสดงโจทย์ที่หลากหลาย และขยายไปสู่สมการที่สองกว่ากำลังสอง เช่นสมการกำลังสามและกำลังสี่ อาจจะใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงให้เห็นแนวคิดเป็นพื้นฐานเดิมที่ได้สรุปไว้

5. ขั้้นประเมิน

ให้นักเรียนทำใบงานรายบุคคล

สรุป

ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่มีสมบัติว่า แต่ละ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ใน f ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$ สำหรับ $(x, y) \in f$ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$ มองว่า x เป็นถูกตัวส่ง (Input) เข้าไปในฟังก์ชัน f และ y คือผลที่แสดงออกมา (Output) ถ้าฟังก์ชันที่เป็นสับเซตของ $A \times B$ และมีโดเมนเท่ากับ A จะเรียกว่าฟังก์ชันจาก A ไป B และพิจารณาชนิดของฟังก์ชันได้ดังนี้

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$
2. f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $\text{Ran}(f) = B$ หรือ $\forall y \in B \exists x \in A, y = f(x)$
3. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ต่อมาศึกษาฟังก์ชันค่าจริงและสนใจกรณีที่มีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง ซึ่งสามารถเขียนกราฟแทนความสัมพันธ์เหล่านั้นได้ และอาศัยการตรวจสอบความเป็นฟังก์ชันโดยใช้เส้นแนวตั้งทุกครั้งลากตัดกราฟต้องตัดเพียงจุดเดียวถึงจะเป็นฟังก์ชัน และในทำนองเดียวกันใช้เส้นแนวนอนเพื่อตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง พิจารณาชนิดของฟังก์ชัน (บวก ลบ คูณ หาร) โดยอาศัยนิยามการดำเนินการระหว่างผลที่แสดงออกมาโดยที่ตัวถูกส่งเป็นตัวเดียวกัน ถัดไปศึกษาฟังก์ชันผกผันได้ซึ่งสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่ผกผันได้คือฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จากนั้นกล่าวถึงฟังก์ชันประกอบ

$$g \circ f = \{(x, z) \mid x \in \text{Dom}(f) \wedge \exists y \in \text{Ran}(f) \cap \text{Dom}(g), y = f(x) \wedge z = g(y)\}$$

และได้สมบัติที่คล้ายคลึงกับสมบัติของจำนวนจริง จากนั้นกล่าวถึงภาพและภาพผกผันซึ่งมีนิยามดังนี้

$$f[U] = \{y \in B \mid \exists x \in U, f(x) = y\} \text{ และ } f^{-1}[V] = \{x \in A \mid f(x) \in V\}$$

และมีสมบัติที่เด่นชัดดังนี้

- | | |
|---|--|
| 1. $f[U \cup V] = f[U] \cup f[V]$ | 3. $f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$ |
| 2. $f[U \cap V] \subseteq f[U] \cap f[V]$ | 4. $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$ |

เมื่อกล่าวถึงการดำเนินการทวิภาคซึ่งเป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่ง สำหรับ $*$ ตัวดำเนินการทวิภาคบน A จะศึกษาสมบัติการสลับที่ เปลี่ยนกลุ่ม การมีเอกลักษณ์ การมีตัวผกผัน ดัชนีตามต่อไปนี้

1. สมบัติสลับที่ : ทุก ๆ $x, y \in A$ จะได้ว่า $x * y = y * x$
2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม : ทุก ๆ $x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(x * y) * z = x * (y * z)$
3. สมบัติการมีเอกลักษณ์ : มี $e \in A$ ซึ่ง $x * e = x = e * x$ ทุก ๆ $x \in A$
เรียก e ว่าเอกลักษณ์ของ A ภายใต้ $*$
4. สมบัติการมีตัวผกผัน : สำหรับ $x \in A$ จะมี $y \in A$ ซึ่ง $x * y = e = y * x$
เรียก y ว่าตัวผกผันของ x ภายใต้ $*$

และสุดท้ายกล่าวถึงการจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน โดยยกตัวอย่างเรื่องการนำฟังก์ชันกำลังสองไปใช้อธิบายจำนวนรากของสมการกำลังสอง ทำให้เห็นภาพการจัดการเรียนรู้ และประโยชน์ฟังก์ชันมากยิ่งขึ้น

คำถามท้ายบท

1. พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ หรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผล ถ้าเป็นจงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\mathbb{R}$ และสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผล

$$1.1 \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2\}$$

$$1.5 \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^2 + 1\}$$

$$1.2 \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1-x}\}$$

$$1.6 \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

$$1.3 \quad f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x-1} \right\}$$

$$1.7 \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{x}\}$$

$$1.4 \quad f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x^2+1} \right\}$$

$$1.8 \quad f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x-1|\}$$

2. ให้ $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f = g$

3. ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ กำหนดโดย
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

3.1 f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

3.2 f มีสมบัติทั่วถึง

4. ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และฟังก์ชัน $\chi_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ นิยามโดย
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \in A \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin A \end{cases}$$

เมื่อให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมทั้งพิสูจน์

4.1 $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

4.2 $\chi_{A \cup B} = \chi_A \cdot \chi_B + \chi_A + \chi_B$

5. ให้ $f, g : A \rightarrow B$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าจริงหรือไม่ พร้อมทั้งพิสูจน์

5.1 $f \cup g : A \rightarrow B$

5.2 $f \cap g : A \rightarrow B$

5.3 ถ้า $f \cup g : A \rightarrow B$ แล้ว $f = g$

5.4 ถ้า $f \cap g : A \rightarrow B$ แล้ว $f = g$

5.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cup g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5.6 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cap g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f \cup g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

5.8 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f \cap g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

6. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้จะมีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

6.1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 1 - 2x$

6.3 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

6.2 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^3 + 1$

6.4 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \sqrt{x}$

7. จงแสดงว่า ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ แล้ว $g \circ f : A \rightarrow C$

8. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

8.1 ถ้า $g \circ f$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

8.2 ถ้า $g \circ f$ มีสมบัติทั่วถึงบน C แล้ว g มีสมบัติทั่วถึงบน C

9. ให้ $f : A \rightarrow B$ จงพิสูจน์

9.1 ถ้า f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มี $g : B \rightarrow A$ ซึ่ง $g \circ f = i_A$

9.2 ถ้า f มีสมบัติทั่วถึงบน B ก็ต่อเมื่อ มี $g : B \rightarrow A$ ซึ่ง $f \circ g = i_B$

9.3 ถ้า f มีสมบัติทั่วถึงบน B ก็ต่อเมื่อ $f \circ f^{-1} = i_B$

10. ให้ A และ B เป็นเซตไม่ใช่เซตว่าง และ $f : A \rightarrow B$ (f^{-1} อาจไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้)

10.1 จงแสดงว่า $f^{-1} \circ f$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต A

10.2 จงหาเซตของชั้นสมมูล $[x]_{f^{-1} \circ f}$

11. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ จงแสดงว่า ถ้า $g \circ f = i_A$ และ $f \circ g = i_B$ แล้ว f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง และ $g = f^{-1}$

12. ให้ $f : A \rightarrow B$ มีสมบัติทั่วถึงบน B , $g : B \rightarrow C$ และ $h : B \rightarrow C$ จงแสดงว่า ถ้า $g \circ f = h \circ f$ แล้ว $g = h$
13. ให้ $f : B \rightarrow C$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง, $g : A \rightarrow B$ และ $h : A \rightarrow B$ จงแสดงว่า ถ้า $f \circ g = f \circ h$ แล้ว $g = h$
14. ให้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = |x|$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์
- 14.1 $f[[0, 1]]$ 14.2 $f[(-1, 1)]$ 14.3 $f^{-1}[(-1, 1)]$ 14.4 $f^{-1}[[1, 3]]$
15. ให้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2 + 1$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์
- 15.1 $f([0, 2])$ 15.2 $f[(-2, 1))$ 15.3 $f^{-1}((-1, 2])$ 15.4 $f^{-1}((-2, 2))$
16. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ และ $D \subseteq C$ จงแสดงว่า $(g \circ f)^{-1}[D] = f^{-1}[g^{-1}[D]]$
17. จงตรวจสอบสมบัติปิดของการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A ต่อไปนี้
- 17.1 นิยาม $a * b = \frac{a^2 - ab - 2b^2}{a + b}$ บน $A = \mathbb{N}$
- 17.2 นิยาม $a * b = \frac{(a + b)^2 - (a + b)}{2}$ บน $A = \mathbb{N}$
- 17.3 นิยาม $a * b =$ เศษที่เหลือจากการหาร $a + b$ ด้วย 7 บน $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 17.4 นิยาม $a * b = (2^a)(2^b)$ บน $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
- 17.5 นิยาม $a * b = \frac{a + b}{a + b + 1}$ บน $A = [0, 1]$
18. จงตรวจสอบสมบัติสลับที่ จัดกลุ่ม เอกลักษณ์ และตัวผกผัน ของการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต G ต่อไปนี้
- 18.1 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = a^2b + ab^2$ 18.9 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = a + b - \pi$
- 18.2 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a(-1)^b + b(-1)^a$ 18.10 $G = \mathbb{Q}$ นิยาม $a * b = 5ab$
- 18.3 $G = \mathbb{Q}^+$ นิยาม $a * b = a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ 18.11 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = ab + 1$
- 18.4 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \frac{a^2 + ab}{a + b + ab}$ 18.12 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a + 2b$
- 18.5 $G = \mathbb{Q}$ นิยาม $a * b = 8ab$ 18.13 $G = \mathbb{Q}^c$ นิยาม $a * b = a + b\sqrt{2}$
- 18.6 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = 2a + 2b$ 18.14 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a + b + ab$
- 18.7 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 18.15 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- 18.8 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = 1 - a - b$ 18.16 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \frac{a + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

19. จงหาตัวผกผันของ $-\frac{2}{3}, -2, 0, 1, \frac{1}{2}$ และจำนวนตรรกยะทุกตัวมีตัวผกผันหรือไม่ ของการดำเนินการ

$$\text{นิยาม } a * b = -ab \text{ สำหรับ } a, b \in \mathbb{Q}$$

20. กำหนดให้ $x \odot (x - y) = x^2 + y^2$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$ จงหาค่าของ $20 \odot (5 \odot 3)$
21. กำหนดให้ $a \odot b = 2a + 3b$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Q}$ ถ้ามี $x, y, z \in \mathbb{Q}$ ซึ่ง $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$ และ $x \odot z = 3$ จงหาค่าของ $z \odot (y \odot x) - (z \odot y) \odot x$
22. กำหนดให้ $a \otimes b = a(a + b)$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า $a \otimes b = 55$ แล้วค่ามากที่สุดของ $b \otimes a$ มีค่าเท่าใด
23. กำหนดให้ $a \oplus b = a + b + 2$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$ จงหาตัวผกผันของ 4 ภายใต้ $\oplus$
24. กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ถ้ามี a เป็นอินเวอร์สการบวกของ b จงหา c ที่ทำให้ $4a + 4b - 2c + 12 = 0$
25. จงหาตัวผกผันภายใต้การคูณของ $\sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ เมื่อ $a > 0$

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
- ชวลิต บุรพาศิริวัฒน์. (2538). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏจันทรเกษม
- ชะเอม สายทอง. (2530). **ทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์
- มานะ เอกจริยวงศ์. (2542). **ทฤษฎีเซต**. ลพบุรี: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ สถาบันราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2558). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: วี.พริ้นท์(1991)
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. (2559). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา**. กรุงเทพฯ: สหมิตรพริ้นติ้ง แอนด์พับลิชชิ่ง จำกัด
- อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์
- Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014) **Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended)**. Marlestone, Australia : Haese& Harris Publications
- Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. การเทียบเท่าของเซต
2. เซตจำกัด
3. เซตอนันต์
4. เซตนับได้
5. เซตนับไม่ได้

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. ตรวจสอบและพิสูจน์การเทียบเท่าระหว่างเซตได้
2. สามารถแยกชนิดของเซตและพิสูจน์ข้อความดังกล่าวได้
3. พิสูจน์สมบัติเกี่ยวกับชนิดของเซตได้
4. เข้าใจหลักการเกี่ยวกับเซตนับได้และนับไม่ได้

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
- 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
- 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
- 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย
- 2.4 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
- 2.5 มอบหมายให้ทำ assignment เพื่อส่งท้ายคาบ

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "เซต"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "เซต"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในใบบันทึกผลงาน

บทที่ 7

เซตจำกัดและเซตอนันต์

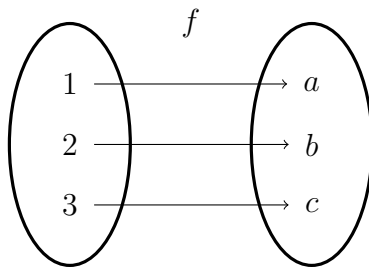
เมื่อกล่าวถึงเซตจำกัดและเซตอนันต์ หลายคนคงเคยรู้จักเป็นเบื้องต้น ถ้าได้เรียนเรื่องเซตในระดับมัธยม เช่น $\{1, 2, 3\}$ เป็นเซตจำกัดเพราะมีสมาชิก 3 ตัว และ $\{1, 2, 3, \dots\}$ เป็นเซตอนันต์เพราะมีสมาชิกมากมายไม่สามารถบอกได้ว่ามีจำนวนเท่าใด แต่การแยกแยะด้วยคำกล่าวข้างต้นอาจนำไปใช้ได้ยาก ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอบทนิยามของเซตจำกัดและเซตอนันต์ และกล่าวถึงสมบัติบางประการของเซตเหล่านั้น

7.1 การเทียบเท่าของเซต

บทนิยาม 7.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะกล่าวว่า A **เทียบเท่า** (Equivalent) กับ B เขียนแทนด้วย $A \sim B$ ถ้ามีฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง หรือ

$$A \sim B \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \exists f : A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง}$$

ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\} \sim \{a, b, c\}$ โดยเลือกฟังก์ชัน f ดังแผนภาพ



รูปที่ 34 แผนภาพแสดง $\{1, 2, 3\} \sim \{a, b, c\}$

ทฤษฎีบท 7.1.2 ให้ A, B และ C เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้ว

1. $A \sim A$
2. ถ้า $A \sim B$ แล้ว $B \sim A$
3. ถ้า $A \sim B$ และ $B \sim C$ แล้ว $A \sim C$

บทพิสูจน์. ให้ A, B และ C เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง

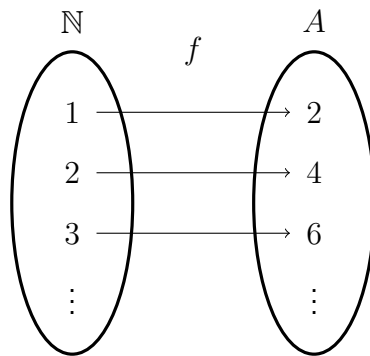
1. เนื่องจากฟังก์ชันเอกลักษณ์ $i_A : A \rightarrow A$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า i_A เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ดังนั้น $A \sim A$
2. สมมติ $A \sim B$ จะได้ว่ามีฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 6.3.4 จะได้ว่า $f^{-1} : B \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ดังนั้น $B \sim A$
3. สมมติ $A \sim B$ และ $B \sim C$ จะได้ว่ามี $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 6.3.10 จะได้ว่า $g \circ f : A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ดังนั้น $A \sim C$



จากข้อ 1 จะสรุปได้ว่าถ้า $A = B$ แล้ว $A \sim B$

ตัวอย่าง 7.1.3 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ จงแสดงว่า $A \sim \mathbb{N}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ



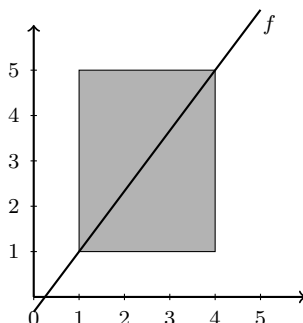
รูปที่ 35 แผนภาพแสดงการจับคู่ของจำนวนนับกับจำนวนคู่

ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ กำหนดโดย $f(x) = 2x$

ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ สมมติ $f(m) = f(n)$ นั่นคือ $2m = 2n$ ดังนั้น $m = n$ ทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 สำหรับ $y \in A$ แล้วจะได้ $y = 2k$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k ทำให้ได้ว่า $f(k) = 2k = y$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง นั่นคือ $A \sim \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 7.1.4 จงแสดงว่า $[1, 4] \sim [1, 5]$

วิธีทำ พิจารณากราฟ



จากกราฟให้ $f : [1, 4] \rightarrow [1, 5]$ กำหนดโดย $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$
 ให้ $x_1, x_2 \in [1, 4]$ สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ว่า $\frac{4}{3}x_1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}$ ดังนั้น $x_1 = x_2$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 สำหรับ $y \in [1, 5]$ จะได้ว่า

$$1 \leq y \leq 5$$

$$3 \leq 3y \leq 15$$

$$4 \leq 3y + 1 \leq 16$$

$$1 \leq \frac{3y + 1}{4} \leq 4$$

เลือก $x = \frac{3y + 1}{4} \in [1, 4]$ และ

$$f(x) = f\left(\frac{3y + 1}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3y + 1}{4}\right) - \frac{1}{3} = y$$

ทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง นั่นคือ $[1, 4] \sim [1, 5]$

ตัวอย่าง 7.1.5 สำหรับเซต A ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า $A \times \{a\} \sim A$

บทพิสูจน์. ให้ $f : A \times \{a\} \rightarrow A$ กำหนดโดย $f(x, a) = x$ เมื่อ $x \in A$

ถ้า $(x_1, a) = (x_2, a)$ แล้วจะได้ว่า $x_1 = x_2$ ดังนั้น $f(x_1, a) = x_1 = x_2 = f(x_2, a)$ นั่นคือ f เป็นไปอย่าง
 แจ่มชัด ให้ $f(x_1, a) = f(x_2, a)$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_2$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และให้ $y \in A$ แล้วจะได้ว่า
 $(y, a) \in A \times \{a\}$ และ $f(y, a) = y$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สรุปได้ว่า $A \times \{a\} \sim A$ □

ตัวอย่าง 7.1.6 จงแสดงว่า $(0, 1) \sim \mathbb{R}$

วิธีทำ พิจารณา $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = \tan x$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง
 และให้ $g : (0, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ กำหนดโดย $g(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$ พิสูจน์ได้โดยง่ายว่า g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบ
 ทั่วถึง ดังนั้น $f \circ g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f \circ g(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

7.2 เซตจำกัด

บทนิยาม 7.2.1 จะกล่าวว่า A เป็นเซตจำกัด (Finite set) ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตว่าง หรือ $A \sim \{1, 2, \dots, k\}$
 สำหรับบางจำนวนนับ k

การให้คำจำกัดความของเซตจำกัดทางคณิตศาสตร์สอดคล้องกับการนับจำนวนสมาชิกของเซตแบบ
 หนึ่ง ในกรณีที่เซตว่างหมายถึงไม่มีสมาชิกในเซตนั้นหรือมีสมาชิก 0 ตัว อีกกรณีหนึ่งคือการนับจำนวน
 สมาชิกได้ k ตัว ทำให้นิยามจำนวนสมาชิกของเซตจำกัดได้ดังนี้

บทนิยาม 7.2.2 ให้ A เป็นเซตจำกัด และ k เป็นจำนวนนับ

$A = \emptyset$ จะกล่าวว่า A มีสมาชิก 0 ตัว เขียนแทนด้วย $n(A) = 0$

$A \sim \{1, 2, 3, \dots, k\}$ จะกล่าวว่า A มีสมาชิก k ตัว เขียนแทนด้วย $n(A) = k$

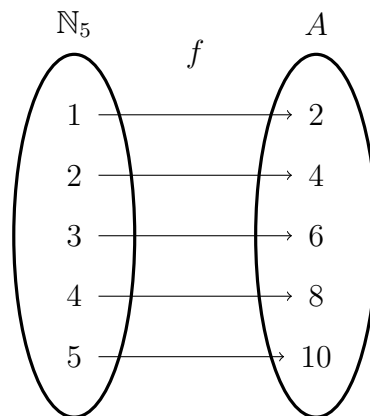
สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $n(A) = k$ อาจเขียนแทนเซต A ด้วย $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ในกรณีที่ $A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ เห็นได้ชัดว่า $\{1, 2, \dots, k\} \sim \{1, 2, \dots, k\}$ (โดยเลือกฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A) ดังนั้น A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก k ตัว จะเรียกเซตนี้ว่า **ส่วนตัด (Section)** ของจำนวนนับ เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย N_k หรือ

$$N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

ทำให้ได้ว่า $A \sim N_k$ เมื่อ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $n(A) = k$

ตัวอย่าง 7.2.3 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

พิจารณาแผนภาพ



รูปที่ 36 แผนภาพแสดง $N_5 \sim \{2, 4, 6, 8, 10\}$

จะเห็นได้ว่า $f : N_5 \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ดังนั้น $N_5 \sim A$ ทำให้ได้ว่า $n(A) = 5$

ทฤษฎีบท 7.2.4 ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ A เป็นเซตใดๆ โดยที่ $a \in A$ แล้วจะได้ว่า

A มีสมาชิก $k + 1$ ตัว ก็ต่อเมื่อ $A - \{a\}$ มีสมาชิก k ตัว

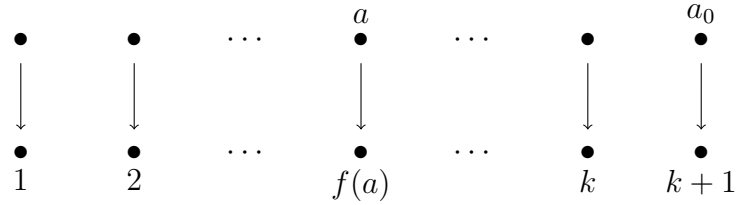
บทพิสูจน์. สมมติว่า A มีสมาชิก $k + 1$ ตัว จะได้ว่า $A \sim N_{k+1}$ นั่นคือมี $f : A \rightarrow N_{k+1}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

กรณีที่ 1 $f(a) = k + 1$ ให้ $g : A - \{a\} \rightarrow N_k$ กำหนดโดย

$$g(x) = f(x) \quad \text{เมื่อ } x \neq a$$

เห็นได้ว่า g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

กรณีที่ 2 $f(a) \neq k+1$ ให้ $a_0 \in A$ และ $f(a_0) = k+1$ แสดงด้วยแผนภาพการจับคู่



ให้ $h : A - \{a\} \rightarrow \mathbb{N}_k$ กำหนดโดย

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{เมื่อ } x \in A - \{a, a_0\} \\ f(a) & \text{เมื่อ } x = a_0 \end{cases}$$

เนื่องจาก $f[A - \{a_0\}] = \mathbb{N}_k$ จะได้ว่า $h(x) \in \mathbb{N}_k$ ทุก $x \in A - \{a\}$ นั่นคือ $\text{Ran}(g) \subseteq \mathbb{N}_k$

ถ้า $x_1 = x_2 = b$ จะได้ว่า $h(x_1) = f(a) = h(x_2)$

ถ้า $x_1 = x_2$ และ $x_1, x_2 \in A - \{a, a_0\}$ จะได้ว่า $h(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = h(x_2)$ เพราะ f เป็นฟังก์ชัน ทำให้ได้ว่า h เป็นไปอย่างแจ่มชัด ต่อไปจะแสดงว่า h เป็นฟังก์ชัน 1-1

กรณีที่ 1 ให้ $x_1, x_2 \in A - \{a, a_0\}$ จะได้ว่า $h(x_1) = f(x_1)$ และ $h(x_2) = f(x_2)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$ สรุปได้ว่า $h(x_1) \neq h(x_2)$

กรณีที่ 2 ให้ x_1 หรือ x_2 อยู่ใน $A - \{a, a_0\}$ โดยไม่เสียใจทั่วไปให้ $x_1 \in A - \{a, a_0\}$ และ $x_2 = a_0$ แล้ว

$$h(x_1) = f(x_1) \neq f(a) = h(x_2)$$

และจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $y \in \mathbb{N}_k$ ถ้า $y = f(a)$ จะได้ $h(a_0) = f(a) = y$ กรณี $y \neq f(a)$ จะได้ว่ามี $x \in A - \{a\}$ ซึ่ง $f(x) = y$ เนื่องจาก $x \neq a_0$ เพราะ $f(a_0) = k+1 \neq y$ และ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $h(x) = f(x) = y$ ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ในนัยกลับกัน สมมติว่า $A - \{a\}$ มีสมาชิก k ตัว ให้ t เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก $A - \{a\}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{N}_k$ แสดงได้โดยง่ายว่า $\bar{t} : A \rightarrow \mathbb{N}_{k+1}$ กำหนดโดย

$$\bar{t}(x) = \begin{cases} t(x) & \text{เมื่อ } x \in A - \{a\} \\ k+1 & \text{เมื่อ } x = a \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ดังนั้น A มีสมาชิก $k+1$ ตัว □

ทฤษฎีบท 7.2.5 ถ้า $A \sim N_n$ สำหรับบางจำนวนนับ n แล้วจะไม่มีฟังก์ชัน 1-1 จากสับเซตแท้ B ของ A ใดๆไปทั่วถึง N_n ยังได้อีกว่า B เป็นเซตจำกัด และจำนวนสมาชิกของ B น้อยกว่า n ตัว

บทพิสูจน์. พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนนับ n สมมติว่าทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับ k ตัว เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $A \sim N_{k+1}$ และ B เป็นสับเซตแท้ที่ไม่ใช่เซตว่างของ A (กรณี B เป็นเซตว่างเห็นได้ชัด) ให้ $b \in B$ โดยทฤษฎีบท 7.2.4 จะได้ว่า $A - \{b\}$ มีสมาชิก k ตัว เนื่องจาก $B - \{b\}$ เป็นสับเซตแท้ของ $A - \{b\}$ โดยสมมติฐานของการอุปนัยจะได้ว่า ไม่มีฟังก์ชัน 1-1 จาก $B - \{b\}$ ไปทั่วถึง N_k ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 7.2.4 จะได้ว่าไม่มีฟังก์ชัน 1-1 จาก B ไปทั่วถึง N_{k+1} นอกจากนี้โดยสมมติฐานของการอุปนัยจะได้อีกว่า $B - \{b\}$ มีสมาชิกน้อยกว่า k ตัว สมมติว่า $B - \{b\}$ มีสมาชิก m ตัว จะได้ว่า B มีสมาชิก $m + 1$ ตัว ดังนั้น B มีสมาชิกน้อยกว่า $k + 1$ ตัว $\square$

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบทนี้สรุปได้ว่าสับเซตของเซตจำกัดย่อมเป็นเซตจำกัดเสมอ

บทแทรก 7.2.6 ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่าไม่มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึงสับเซตแท้ใดๆของ A

บทพิสูจน์. ให้ A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า $A \sim N_n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือมี $f : A \rightarrow N_n$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง สมมติว่ามีฟังก์ชัน $g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง เมื่อ B เป็นสับเซตแท้ของ A จะได้ว่า $f \circ g^{-1} : B \rightarrow N_n$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 7.2.5 ดังนั้นไม่มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึงสับเซตแท้ใดๆของ A $\square$

บทแทรก 7.2.7 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A มีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

บทพิสูจน์. กรณีที่ $A = \emptyset$ เห็นได้ชัด ให้ A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง โดยที่ $n(A) = n$ และ $n(A) = m$ นั่นคือ $A \sim N_n$ และ $A \sim N_m$ จะได้ว่ามี f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง N_n และ N_m ตามลำดับ สมมติ $n \neq m$ โดยไม่เสียทั่วไปให้ $m < n$ ดังนั้น N_m เป็นสับเซตแท้ของ N_n และ $f \circ g^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก N_m ไปทั่วถึง N_n เกิดข้อขัดแย้งกับบทแทรก 7.2.6 ดังนั้น $m = n$ $\square$

ทฤษฎีบท 7.2.8 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันจาก $\{1, 2, \dots, n\}$ ไปทั่วถึง A
2. มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป $\{1, 2, \dots, n\}$
3. A เป็นเซตจำกัด และมีสมาชิกอย่างมาก n ตัว

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด $\square$

บทแทรก 7.2.9 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นเซตจำกัด

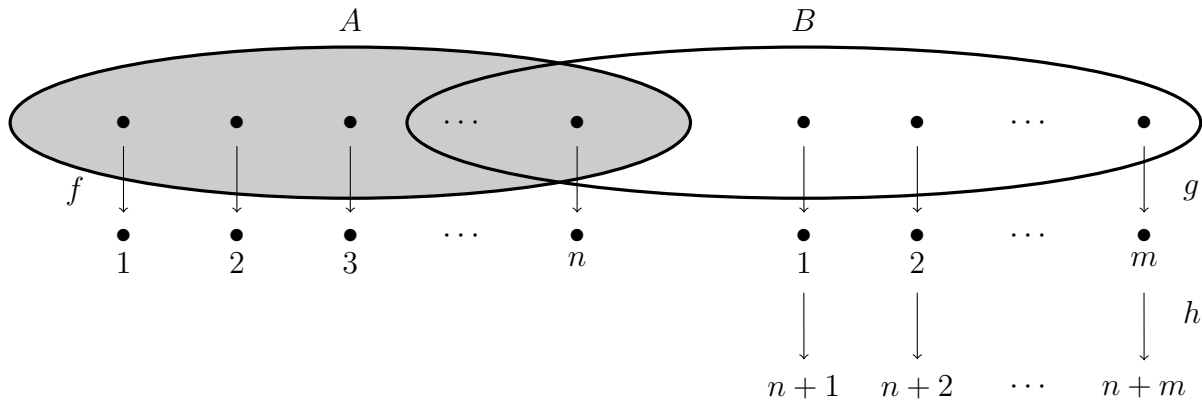
บทพิสูจน์. เนื่องจาก $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นสับเซตของ A โดยทฤษฎีบท 7.2.5 จะได้ว่า $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นเซตจำกัด $\square$

ทฤษฎีบท 7.2.10 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด

โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \sim \mathbb{N}_n$ เนื่องจาก $B - A$ เป็นเซตจำกัด ดังนั้น $B - A \sim \mathbb{N}_m$ จะได้ว่ามี $f : A \rightarrow \mathbb{N}_n$ และ $g : B - A \rightarrow \mathbb{N}_m$



รูปที่ 37 แผนภาพการสร้างฟังก์ชัน $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}_{n+m}$

ให้ $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}_{n+m}$ กำหนดโดย

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{เมื่อ } x \in A \\ g(x) + n & \text{เมื่อ } x \in B - A \end{cases}$$

เนื่องจาก $A \cup B = A \cup (B - A)$ และ $A \cap (B - A) = \emptyset$ ทำให้ h เป็นไปอย่างแจ่มชัด ต่อไปจะแสดงว่า h เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $x_1, x_2 \in A \cup B$ สมมติ $x_1 \neq x_2$

กรณี $x_1, x_2 \in A$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $h(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = h(x_2)$

กรณี $x_1, x_2 \in B - A$ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $h(x_1) = g(x_1) + n \neq g(x_2) + n = h(x_2)$

กรณี x_1 หรือ x_2 อยู่ใน A โดยไม่เสียใจทั่วไปให้ $x_1 \in A$ และ $x_2 \in B - A$ จะได้ว่า

$$h(x_1) = f(x_1) \leq n < 1 + n \leq g(x_2) + n = h(x_2)$$

ให้ $y \in \mathbb{N}_{n+m}$ กรณี $y \leq n$ จะได้ว่ามี $x \in A$ ซึ่ง $h(x) = f(x) = y$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ในกรณีที่ $y > n$ ดังนั้น $n < y < n + m$ นั่นคือ $0 < y - n < m$ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง $\mathbb{N}_m$ จะมี $x \in B - A$ ซึ่ง $g(x) = y - n$ ดังนั้น

$$h(x) = g(x) + n = y$$

ดังนั้น h เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ทำให้สรุปได้ว่า $n(A \cup B) = n + m$ หรือ

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$$

ในกรณีที่ $A \cap B = \emptyset$ จะได้ว่า $B - A = B$ ทำให้สรุปได้ว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ □

บทแทรก 7.2.11 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

บทพิสูจน์. เนื่องจาก $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ และ $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ โดยทฤษฎีบท 7.2.10 แล้ว

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

□

บทแทรก 7.2.12 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

บทพิสูจน์. เนื่องจาก $A \cup B = (A - B) \cup B$ และ $(A - B) \cap B = \emptyset$ โดยทฤษฎีบท 7.2.10 จะได้ว่า

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B)$$

โดยบทแทรก 7.2.11 จะได้ว่า $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ สรุปได้ว่า

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

□

บทแทรก 7.2.13 ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า

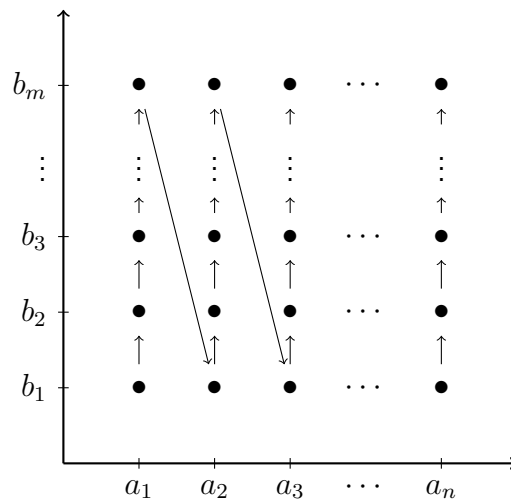
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

ทฤษฎีบท 7.2.14 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \times B$ เป็นเซตจำกัด

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ และ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ พิจารณากภาพต่อไปนี้



รูปที่ 38 แผนภาพการสร้างฟังก์ชัน $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}_{nm}$

กำหนดให้ $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}_{nm}$ โดย

$$f((a_i, b_j)) = (i-1)m + j \quad \text{ทุก } (a_i, b_j) \in A \times B$$

แสดงได้โดยง่ายว่า f เป็นไปได้อย่างแจ่มชัด ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $(a_i, b_j), (a_k, b_t) \in A \times B$ สมมติว่า $f((a_i, b_j)) = f((a_k, b_t))$ นั่นคือ $(i-1)m + j = (k-1)m + t$ สมมติว่า $i \neq k$ โดยไม่เสีย
 ทั่วไป $i < k$ นั่นคือ $i \leq k-1$ ทำให้สรุปได้ว่า

$$(i-1)m + j \leq (i-1)m + m = im \leq (k-1)m < (k-1)m + t$$

ทำให้ได้ว่า $f((a_i, b_j)) \neq f((a_k, b_t))$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน ทำให้ได้ว่า $i = k$ แล้ว

$$(i-1)m + j = (k-1)m + t = (i-1)m + t$$

จะได้ว่า $j = t$ นั่นคือ $(a_i, b_j) = (a_k, b_t)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 7.2.8 จะได้ว่า $A \times B$ เป็น
 เซตจำกัด □

7.3 เซตอนันต์

บทนิยาม 7.3.1 เซตอนันต์ (Infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

อาศัยกฎแย้งกลับที่จากบทแทรก 7.2.6 จะได้ว่า

ถ้ามีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง สับเซตแท้บางเซตของ A แล้ว A เป็นเซตอนันต์

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้ามีสับเซตแท้ B ของ A ซึ่ง $B \sim A$ แล้ว A เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 7.3.2 $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์

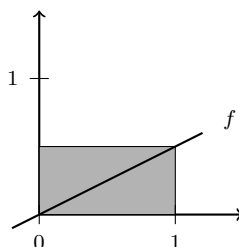
บทพิสูจน์. เนื่องจาก $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ เป็นสับเซตแท้ของ $\mathbb{N}$ โดยตัวอย่าง 7.1.3 จะสรุปได้ว่า $B \sim \mathbb{N}$ ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์ □

โดยบทแทรก 7.2.6 ทำให้ได้ข้อสรุปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.3.3 เซตที่มีสับเซตเป็นเซตอนันต์ย่อยเป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์ และ N เป็นสับเซตของ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ ดังนั้น $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตอนันต์

ตัวอย่าง 7.3.4 พิสูจน์ $(0, 1)$ เป็นเซตอนันต์ โดยแสดงว่า $(0, \frac{1}{2}) \sim (0, 1)$ พิจารณากราฟต่อไปนี้



จากกราฟให้ $f : (0, 1) \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ กำหนดโดย $f(x) = \frac{1}{2}x$

ให้ $x_1, x_2 \in (0, 1)$ สมมติว่า $x_1 = x_2$ แล้ว $f(x_1) = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_2 = f(x_2)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ แล้ว $0 < y < \frac{1}{2}$ นั่นคือ $0 < 2y < 1$ เลือก $x = 2y \in (0, 1)$ จะได้ว่า

$$f(x) = f(2y) = \frac{1}{2}(2y) = y$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สรุปได้ว่า $\left(0, \frac{1}{2}\right) \sim (0, 1)$ เนื่องจาก $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ เป็นสับเซตแท้ของ $(0, 1)$ ดังนั้น $(0, 1)$ เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 7.3.5 ให้ A เป็นเซต จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
2. มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง สับเซตแท้บางเซตของ A
3. A เป็นเซตอนันต์

บทพิสูจน์. (2) $\leftrightarrow$ (3) เป็นจริงโดยทฤษฎีบทที่ผ่านมาพิสูจน์เพียง (1) $\leftrightarrow$ (2) ทำเป็นแบบฝึกหัด □

ตัวอย่าง 7.3.6 จงแสดงว่า $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ เป็นเซตอนันต์

$$\text{วิธีทำ ให้ } f : \mathbb{N} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ กำหนดโดย } f(x) = \frac{1}{x+2}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ x จะได้ว่า $x+2 \geq 3$ จะได้ว่า $0 < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\text{Ran}(f) \subseteq \left(0, \frac{1}{2}\right)$ นั่นคือ f เป็นไปอย่างแจ่มชัด ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ว่า $\frac{1}{x_1+2} = \frac{1}{x_2+2}$ ดังนั้น $x_1 = x_2$ ฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 7.3.5 สรุปได้ว่า $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 7.3.7 ให้ A เป็นเซตอนันต์ ถ้า $A \sim B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

บทพิสูจน์. ให้ A เป็นเซตอนันต์ โดยทฤษฎีบท 7.3.5 จะได้ว่ามี $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 สมมติว่า $A \sim B$ จะได้ว่ามี $g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง โดยทฤษฎีบท 6.3.10 ทำให้ได้ว่า $g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และโดยทฤษฎีบท 7.3.5 สรุปได้ว่า B เป็นเซตอนันต์ □

7.4 เซตนับได้

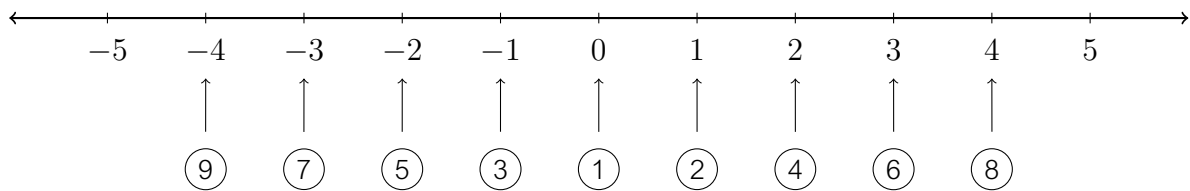
ในหัวข้อนี้จะกล่าวในการแยกแยะชนิดของเซตแต่ละชนิดออกจากกัน โดยดูความสามารถในการนับจำนวนสมาชิกของเซตนั้น ๆ

บทนิยาม 7.4.1 จะกล่าวว่าเซต A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ (Countably infinite set หรือ Denumerable set) ถ้า $A \sim \mathbb{N}$

ข้อสังเกต เนื่องจาก $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ทฤษฎีบท 7.4.2 $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

บทพิสูจน์. พิจารณาแผนภาพ



รูปที่ 39 แผนภาพการสร้างฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

โดยตัวอย่าง 6.1.18 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ดังนั้น $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ สรุปได้ว่า $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ □

ทฤษฎีบท 7.4.3 ให้ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ และ $B \sim A$ จะได้ว่า B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

บทพิสูจน์. ให้ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จะได้ว่า $A \sim \mathbb{N}$ สมมติ $A \sim B$ โดยทฤษฎีบท 7.1.2 จะได้ว่า $B \sim \mathbb{N}$ สรุปได้ว่า B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ □

ตัวอย่าง 7.4.4 ให้ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จะได้ว่า $A \times \{a\}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้
จะได้ว่า $A \sim \mathbb{N}$ นั่นคือมี $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ให้

$$g : A \times \{a\} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{กำหนดโดย} \quad g((x, a)) = f(x)$$

เห็นได้โดยง่ายว่า g เป็นไปได้อย่างแจ่มชัด ให้ $(x_1, a), (x_2, a) \in A \times \{a\}$ สมมติว่า $g((x_1, a)) = g((x_2, a))$
จะได้ว่า $f(x_1) = f(x_2)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_2$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้
 $y \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $z \in A$ ซึ่ง $f(z) = y$ และได้ว่า $(z, a) \in A \times \{a\}$ แล้ว

$$g((z, a)) = f(z) = y$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้น $A \times \{a\} \sim \mathbb{N}$ สรุปได้ว่า $A \times \{a\}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

บทนิยาม 7.4.5 จะกล่าวว่าเซต A เป็นเซตนับได้ (countable set) ถ้า A เป็นเซตจำกัด หรือเป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ตัวอย่าง 7.4.6 กำหนดให้ $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ เป็นเซตของจำนวนคู่ ให้ $f : \mathbb{Z} \rightarrow E$ กำหนดโดย $f(x) = 2x$
เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ทำให้ได้ว่า $\mathbb{Z} \sim E$ เนื่องจาก $\mathbb{Z}$ เป็นเซตนับได้ ดังนั้น E เป็น
เซตนับได้ ในทำนองเดียวกันเซตของจำนวนคี่ $O = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ เป็นเซตนับได้ โดยให้ $g : \mathbb{Z} \rightarrow O$
กำหนดโดย $g(x) = 2x + 1$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นวิธีการตรวจสอบเซตนับได้ เพื่อใช้ในเซตที่ตรวจสอบโดยนิยามเป็นไปได้อย่างยาก

ทฤษฎีบท 7.4.7 ให้ A เป็นเซตไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันทั่วถึง $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
2. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $g : A \rightarrow \mathbb{N}$
3. A เป็นเซตนับได้

บทแทรก 7.4.8 สับเซตของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้

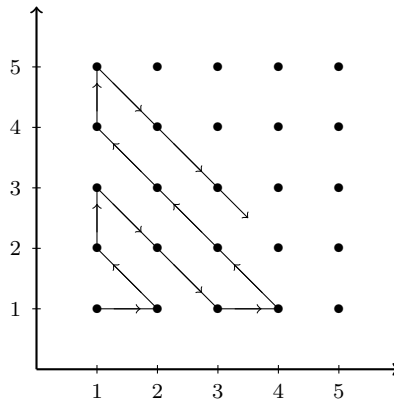
บทพิสูจน์. ให้ A เป็นเซตนับได้ โดยทฤษฎีบท 7.4.7 มีฟังก์ชันทั่วถึง $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ ให้ $B \subseteq A$ กรณีที่ $B = \emptyset$
จะได้บทแทรกดังกล่าว สมมติ $B \neq \emptyset$ ให้ $f : B \rightarrow \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(x) = g(x)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1
ดังนั้น B เป็นเซตนับได้ □

ข้อสังเกต ถ้า A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นเซตนับได้ เพราะว่า $A \cap B \subseteq A$ และ
 $A - B \subseteq A$

บทแทรก 7.4.9 ถ้า A เป็นเซตซึ่งมีฟังก์ชันจากเซตนับได้ไปทั่วถึง A แล้ว A เป็นเซตนับได้

บทพิสูจน์. สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันจากเซตนับได้ B ไปทั่วถึง A เนื่องจาก B เป็นเซตนับได้ที่ไม่ใช่เซตว่าง
โดยทฤษฎีบท 7.4.7 จะได้ว่ามี $g : \mathbb{N} \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้น $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{N}$ ไปทั่วถึง A
ดังนั้น A เป็นเซตนับได้ □

ต่อไปจะพิจารณาการนับสมาชิกของ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ดังกราฟต่อไปนี้



รูปที่ 40 แสดงการนับสมาชิกของเซต $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

จากกราฟสามารถสร้างฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ โดย $f((x, y)) = 2^{x-1}(2y - 1)$ ถ้าพิสูจน์ได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จะสรุปได้ว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้ แต่การพิสูจน์ดังกล่าวมีความยุ่งยากและต้องตรวจสอบทั้ง 2 อย่าง ดังนั้นจะใช้ทฤษฎีบท 7.4.7 ในการพิสูจน์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.4.10 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้

บทพิสูจน์. ให้ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ กำหนดโดย

$$f((x, y)) = 2^x \cdot 3^y$$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$2^x \cdot 3^y = 2^z \cdot 3^w$$

ถ้า $x < z$ จะได้ว่า $3^y = 2^{z-x} \cdot 3^w$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ 3 เป็นจำนวนคี่ ในทำนองเดียวกันถ้า $x > z$ จะเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $x = z$ ทำให้ได้ว่า $3^y = 3^w$ สมมติ $y \neq w$ โดยไม่เสียหายนัยทั่วไปให้ $y < w$ จะได้ว่า $1 = 3^{w-y}$ เป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $y = w$ ทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 7.4.7 สรุปได้ว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้ $\square$

จากทฤษฎีบททำให้ได้ข้อสรุปว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ทำให้เพียงพอในการพิสูจน์เซตอนันต์แบบนับได้โดยแสดงว่าเซตนั้นสมมูลกับสับเซตของ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 7.4.11 ให้ A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตนับได้

บทพิสูจน์. เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่าเฉพาะกรณีนันต์ ให้ A และ B เป็นเซตอนันต์ สมมติว่า $A \cap B = \emptyset$ จะได้ว่า

$$A = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots\} \quad \text{และ} \quad B = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots\}$$

ให้ $f : A \cup B \rightarrow \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(x_{ij}) = (i, j)$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$ และ $j \in \mathbb{N}$ พิสูจน์ได้โดยง่ายว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ดังนั้น $A \cup B \sim \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ เนื่องจาก $\{1, 2\} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ดังนั้น $A \cup B$ เป็นเซตนับได้ $\square$

ทฤษฎีบท 7.4.12 ให้ A และ B เป็นเซตนับได้แล้ว $A \times B$ เป็นเซตนับได้

บทพิสูจน์. กรณีที่ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$ จะได้ว่า $A \times B = \emptyset$ ทำให้ได้ว่า $A \times B$ เป็นเซตนับได้ สมมติว่า $A \neq \emptyset$ และ $B \neq \emptyset$ เป็นเซตนับได้ โดยทฤษฎีบท 7.4.7 จะได้ว่ามีฟังก์ชัน 1-1 $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ และ $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ ให้ $h : A \times B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ กำหนดโดย $h((x, y)) = (f(x), g(y))$ จะได้ว่า h เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $A \times B$ เป็นเซตนับได้ $\square$

จากทฤษฎีบทนี้จะได้ว่า $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ เนื่องจาก $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ทฤษฎีบท 7.4.13 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ทฤษฎีบท 7.4.14 $\mathbb{Q}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

บทพิสูจน์. ให้ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ กำหนดโดย

$$f((x, y)) = \frac{x}{y}$$

เห็นได้โดยง่ายว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง โดยบทแทรก 7.4.9 จะได้ว่า $\mathbb{Q}^+$ เป็นเซตนับได้ เนื่องจาก $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+$ และเป็นเซตอนันต์ ดังนั้น $\mathbb{Q}^+$ เป็นเซตอนันต์ และได้อีกว่า $\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{Q}^-$ โดยใช้ฟังก์ชัน $g(x) = -x$ เมื่อ $g : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^-$ ดังนั้น $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ $\square$

จากทฤษฎีบทนี้ทำให้สรุปได้ว่า $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

7.5 เซตนับไม่ได้

บทนิยาม 7.5.1 เซตนับไม่ได้ (Uncountable set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตนับได้

การพิสูจน์เซตนับไม่ได้มีความยุ่งยากและซับซ้อนเมื่อใช้บทนิยามดังกล่าว จำเป็นต้องอาศัยผลที่ได้จากทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้มาในหัวข้อก่อนนี้ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. เซตนับไม่ได้เป็นเซตอนันต์ (โดยนิยามของเซตนับได้)
2. ถ้า $A \subseteq B$ และ A เป็นเซตนับไม่ได้ แล้ว B เป็นเซตนับไม่ได้ (โดยบทแทรก 7.4.8)
3. ถ้า $A \sim B$ จะได้ว่า A เป็นเซตนับไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ B เป็นเซตนับไม่ได้ (โดยทฤษฎีบท 7.4.3)
4. ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า A เป็นเซตนับไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีฟังก์ชันจาก $\mathbb{N}$ ไปทั่วถึง A (โดยทฤษฎีบท 7.4.7)

ทฤษฎีบท 7.5.2 เซตของสับเซตทั้งหมดของ $\mathbb{N}$ หรือ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ เป็นเซตนับไม่ได้

บทพิสูจน์. ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ และให้ $A = \{k \in \mathbb{N} : k \notin f(k)\}$ ดังนั้น $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง โดยแสดงว่า $f(n) \neq A$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $n \in \mathbb{N}$

กรณีที่ 1 $n \in f(n)$ โดยนิยามของ A จะได้ว่า $n \notin A$ นั่นคือ $n \in f(n) - A$ จะได้ว่า $f(n) \neq A$

กรณีที่ 2 $n \notin f(n)$ โดยนิยามของ A จะได้ว่า $n \in A$ นั่นคือ $n \in A - f(n)$ จะได้ว่า $f(n) \neq A$

ทำให้สรุปได้ว่า $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ เป็นเซตนับไม่ได้

□

ทฤษฎีบท 7.5.3 $(0, 1)$ เป็นเซตนับไม่ได้

บทพิสูจน์. ให้ $x \in (0, 1)$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots$$

โดยแต่ละ $i \in \mathbb{N}$, x_i เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq x_i \leq 9$ ได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น (พัฒน์ อุดมกะวานิช. 2559. หน้า 178) ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ เขียนในรูปทศนิยมได้วิธีเดียว ดังนั้น

$$f(k) = 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots$$

เลือก $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ โดยที่

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a_{ii} \neq 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } a_{ii} = 1 \end{cases}$$

จะแสดงว่าไม่มีจำนวนนับ n ใดๆ ซึ่ง $f(n) = x$ สมมติว่ามีจำนวนนับ n , $f(n) = x$ จะได้ว่า

$$0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots = f(n) = x = 0.x_1x_2x_3\ldots$$

ดังนั้น $x_n = a_{nn}$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับการเลือก x ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สรุปได้ว่า $(0, 1)$ เป็นเซตนับไม่ได้

□

ทฤษฎีบท 7.5.4 $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้

บทพิสูจน์. เนื่องจาก $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ และเป็นเซตนับไม่ได้ ดังนั้น $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้

□

ทฤษฎีบท 7.5.5 $\mathbb{Q}^c$ เป็นเซตนับไม่ได้

บทพิสูจน์. สมมติ $\mathbb{Q}^c$ เป็นเซตนับได้ เนื่องจาก $\mathbb{Q}$ เป็นเซตนับได้ และ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ ทำให้ได้ว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับได้ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 7.5.4 ดังนั้น $\mathbb{Q}^c$ เป็นเซตนับไม่ได้

□

สรุป

ในบทนี้จะกล่าวถึงเซตจำกัดและเซตอนันต์ เริ่มต้นจากการเทียบเท่าของเซต

$A \sim B$ ก็ต่อเมื่อ $\exists f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

เซตใดก็ตามที่เทียบเท่ากับ N_k บางจำนวนนับ k หรือไม่ก็เป็นเซตว่าง เรียกเซตนี้ว่าเซตจำกัด และเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัดเรียกว่าเซตอนันต์ และเซตที่เทียบเท่ากับ N จะเรียกว่าเซตอนันต์แบบนับได้ เซตนับได้จะหมายถึงเซตอนันต์แบบนับได้และเซตจำกัด และเซตที่ไม่ใช่เซตนับได้เรียกว่า เซตนับไม่ได้

คำถามท้ายบท

1. จงพิสูจน์ว่า " สับเซตของเซตจำกัดย่อมเป็นเซตจำกัด "
2. จงพิสูจน์ว่า " สับเซตแท้ของเซตจำกัดย่อมมีสมาชิกน้อยกว่าจำนวนของสมาชิกของเซตจำกัดนั้น "
3. ให้ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ เมื่อ A_α เป็นเซตจำกัดทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ จงพิสูจน์ว่า

$$3.1 \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \text{ เป็นเซตจำกัด}$$

$$3.2 \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \text{ เป็นเซตจำกัด}$$

$$3.3 \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \text{ เป็นเซตจำกัด}$$

4. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตจำกัด
5. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตอนันต์
6. ให้ A และ B เป็นเซต จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้
 - 6.1 $A \cap B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตอนันต์
 - 6.2 $A \cap B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตจำกัด
 - 6.3 $A - B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตจำกัด
 - 6.4 $A - B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตอนันต์
7. ให้ A และ B เป็นเซต และ $F = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ จงแสดงว่า ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว F เป็นเซตจำกัด
8. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้
 - 8.1 เซตของจำนวนคือเป็นเซตนับได้
 - 8.2 สับเซตของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้
 - 8.3 เซตใดก็ตามมีสับเซตที่เป็นเซตนับไม่ได้ย่อมเป็นเซตนับไม่ได้
 - 8.4 ให้ A และ B เป็นเซต ถ้า $A \sim B$ และ A เป็นเซตนับได้ แล้ว B เป็นเซตนับได้

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ชะเอม สายทอง. (2530). **ทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์
- มานะ เอกจริยวงศ์. (2542). **ทฤษฎีเซต**. ลพบุรี: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ สถาบันราชภัฏ
เทพสตรี ลพบุรี
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย
- สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. (2559). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา**.
กรุงเทพฯ: สหมิตรพรินติ้ง แอนด์พับลิชชิ่ง จำกัด
- อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์
และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์
- Arthur Benjamin. (2015). **Magic of math**. New York: Hachette book group, Inc.
- Brian Clegg. (2003). **A brief history of infinity**. UK: CPI group (UK) Ltd
- F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. (2003). **Sets for Mathematics**. UK: Cambridge
university press
- Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. สัจพจน์สนาม
2. กฎไตรวิภาค
3. ค่าสัมบูรณ์
4. สัจพจน์ความบริบูรณ์
5. การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนจริง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจสัจพจน์สนามและนำไปใช้พิสูจน์ได้
2. เข้าใจกฎไตรวิภาคและสามารถนำไปพิสูจน์ได้
3. เข้าใจความหมายของค่าสัมบูรณ์และนำไปแก้โจทย์ปัญหาเบื้องต้นได้
4. เข้าใจสัจพจน์ความบริบูรณ์และพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องได้
5. รู้จักการจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนจริง

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน
 - 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
 - 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
 - 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. กิจกรรมการเรียนการสอน
 - 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
 - 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
 - 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย
 - 2.4 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
 - 2.5 มอบหมายให้ทำ assignment เพื่อส่งท้ายคาบ

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "จำนวนจริง"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "จำนวนจริง"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในใบบันทึกผลงาน

บทที่ 8

ระบบจำนวนจริง

การสร้างระบบจำนวนจริงนั้นทำได้หลายวิธี วิธีหนึ่งคือเริ่มต้นจากสัจพจน์เปอาโน (Peano postulates) ซึ่งเกี่ยวกับสมบัติจำนวนนับ หลังจากนั้นก็สร้างจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในที่สุด ในบทนี้จะไม่กล่าวถึงการสร้างระบบจำนวนจริง แต่จะกล่าวถึงสัจพจน์สนามอันเป็นข้อตกลงเบื้องต้นเพื่อให้ได้มาซึ่งสมบัติต่างๆของจำนวนจริง และศึกษาความสมบูรณ์ของจำนวนจริง

8.1 สัจพจน์สนาม

สัจพจน์ 1 (สัจพจน์สนาม (Field axioms)) สมมติว่ามีเซต $\mathbb{R}$ ซึ่งเรียกว่า เซตของจำนวนจริง (The set of real numbers) และมีการดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\cdot$ ซึ่งเรียกว่า การบวก (Addition) และ การคูณ (Multiplication) ตามลำดับ โดยมีสมบัติดังนี้

R1 สมบัติปิด (Closure laws)

สำหรับการบวก : ทุก $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $x + y \in \mathbb{R}$
สำหรับการคูณ : ทุก $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $x \cdot y \in \mathbb{R}$

R2 สมบัติสลับที่ (Commutative laws)

สำหรับการบวก : ทุก $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $x + y = y + x$
สำหรับการคูณ : ทุก $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $x \cdot y = y \cdot x$

R3 สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative laws)

สำหรับการบวก : ทุก $x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(x + y) + z = x + (y + z)$
สำหรับการคูณ : ทุก $x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

R4 สมบัติการมีเอกลักษณ์ (Existence of identities)

สำหรับการบวก : มี $0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x + 0 = x = 0 + x$ ทุก $x \in \mathbb{R}$
เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวก (Additive identity)
สำหรับการคูณ : มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ ทุก $x \in \mathbb{R}$
เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์การคูณ (Multiplicative identity)

R5 สมบัติการมีตัวผกผัน (Existence of inverses)

สำหรับการบวก : สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $-x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x + (-x) = 0 = (-x) + x$
เรียก $-x$ ว่าตัวผกผันการบวกของ x

สำหรับการคูณ : สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \neq 0$ จะมี $x^{-1} \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$
เรียก x^{-1} ว่าตัวผกผันการคูณของ x

R6 สมบัติการแจกแจง (Distributive law)

สำหรับ $x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{และ} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

เพื่อความสะดวก xy แทน $x \cdot y$ จากสัจพจน์สนาม R5 จะได้ว่า

$$1. \quad -0 = 0 \quad \text{เพราะว่า} \quad 0 + 0 = 0$$

$$2. \quad 1^{-1} = 1 \quad \text{เพราะว่า} \quad 1 \cdot 1 = 1$$

ทฤษฎีบท 8.1.1 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. สำหรับเซตจำนวนจริงมี 0 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่เป็นเอกลักษณ์การบวก
2. สำหรับเซตจำนวนจริงมี 1 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่เป็นเอกลักษณ์การคูณ

บทพิสูจน์. 1. สมมติว่ามี $a \in \mathbb{R}$ เป็นเอกลักษณ์การบวก นั่นคือ $x + a = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $0 + a = 0$ โดย (R4) ทำให้ได้ว่า

$$0 = 0 + a = a$$

ดังนั้น $a = 0$

2. สมมติว่ามี $a \in \mathbb{R}$ เป็นเอกลักษณ์การคูณ นั่นคือ $xa = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $1a = 1$ โดย (R4) ทำให้ได้ว่า

$$1 = 1a = a$$

ดังนั้น $a = 1$

**ทฤษฎีบท 8.1.2** ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $x0 = 0 = x0$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a0 &= a(0 + 0) && \text{โดย R4} \\ &= a0 + a0 && \text{โดย R6} \end{aligned}$$

เนื่องจากเอกลักษณ์การบวกมีเพียงตัวเดียวคือ 0 ดังนั้น $a0 = 0$ ในทำนองเดียวกัน

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

ดังนั้น $0a = 0$



ทฤษฎีบท 8.1.3 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง ถ้า $x = y$ แล้ว $x + z = y + z$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากสมมติการเท่ากัน □

ทฤษฎีบท 8.1.4 (สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก) ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ ถ้า $x + y = x + z$ แล้ว $y = z$

บทพิสูจน์. ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ สมมติ $x + y = x + z$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= 0 + y && \text{โดย R4} \\ &= ((-x) + x) + y && \text{โดย R5} \\ &= (-x) + (x + y) && \text{โดย R3} \\ &= (-x) + (x + z) && \text{โดยสมมติฐาน} \\ &= ((-x) + x) + z && \text{โดย R3} \\ &= 0 + z && \text{โดย R5} \\ &= z && \text{โดย R4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = z$ □

ทฤษฎีบท 8.1.5 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะมีตัวผกผันการบวกเพียงตัวเดียวเท่านั้น
2. สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ จะมีตัวผกผันการคูณเพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$

1. สมมติว่า $a \in \mathbb{R}$ เป็นตัวผกผันของ x ดังนั้น $x + a = 0 = a + x$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} a &= a + 0 && \text{โดย R4} \\ &= a + (x + (-x)) && \text{โดย R5} \\ &= (a + x) + (-x) && \text{โดย R3} \\ &= 0 + (-x) && \text{โดยสมมติฐาน} \\ &= (-x) && \text{โดย R4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = -x$

2. ให้ $x \neq 0$ สมมติว่า $a \in \mathbb{R}$ เป็นตัวผกผันของ x ดังนั้น $xa = 1 = ax$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} a &= a1 && \text{โดย R4} \\ &= a(xx^{-1}) && \text{โดย R5} \\ &= (ax)x^{-1} && \text{โดย R3} \\ &= 1x^{-1} && \text{โดยสมมติฐาน} \\ &= x^{-1} && \text{โดย R4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = x^{-1}$



ทฤษฎีบท 8.1.6 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง ถ้า $x = y$ แล้ว $xz = yz$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากสมบัติการเท่ากัน ☐

ทฤษฎีบท 8.1.7 (สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ) ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง ถ้า $x \neq 0$ และ $xy = xz$ แล้ว $y = z$

บทพิสูจน์. ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ และ $x \neq 0$ สมมติ $xy = xz$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= 1y && \text{โดย R4} \\ &= (x^{-1}x)y && \text{โดย R5} \\ &= x^{-1}(xy) && \text{โดย R3} \\ &= x^{-1}(xz) && \text{โดยสมมติฐาน} \\ &= (x^{-1}x)z && \text{โดย R3} \\ &= 1z && \text{โดย R5} \\ &= z && \text{โดย R4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = z$ ☐

บทนิยาม 8.1.8 สำหรับจำนวนจริง x และ y กำหนดให้ $x - y = x + (-y)$ และ $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ เมื่อ $y \neq 0$

เพื่อความสะดวกเราจะใช้ $-xy$ แทน $-(xy)$ ดังนั้น $-1x = -(1x) = -x$

ทฤษฎีบท 8.1.9 ให้ x เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $-(-x) = x$
2. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $(x^{-1})^{-1} = x$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$

1. เนื่องจาก $-(-x)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ $-x$ จะได้ว่า $(-x) + [-(-x)] = 0$ จาก R5 ทำให้ได้ว่า $(-x) + x = 0$ เนื่องจากตัวผกผันการบวกมีเพียงตัวเดียว ดังนั้น $x = -(-x)$
2. สมมติว่า $x \neq 0$ เนื่องจาก $(x^{-1})^{-1}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ x^{-1} จะได้ว่า $x^{-1}(x^{-1})^{-1} = 1$ จาก R5 ทำให้ได้ว่า $x^{-1}x = 1$ เนื่องจากตัวผกผันการคูณมีเพียงตัวเดียว ดังนั้น $(x^{-1})^{-1} = x$



ทฤษฎีบท 8.1.10 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $(-x)y = x(-y) = -xy$

บทพิสูจน์. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
 0 &= 0y && \text{โดยทฤษฎีบท 8.1.2} \\
 &= (x + (-x))y && \text{โดย R5} \\
 &= xy + (-x)y && \text{โดย R6} \\
 0 &= x0 && \text{โดยทฤษฎีบท 8.1.2} \\
 &= x(y + (-y)) && \text{โดย R5} \\
 &= xy + x(-y) && \text{โดย R6}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $xy + (-x)y = xy + x(-y)$ โดยสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก จะได้ว่า $x(-y) = (-x)y$ เนื่องจาก $xy + x(-y) = 0$ ดังนั้น $(-x)y$ เป็นตัวผกผันการบวกของ xy และตัวผกผันการบวกมีเพียงตัวเดียวทำให้ได้ว่า $(-x)y = -xy$ □

บทแทรก 8.1.11 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม $(-1)x = -x$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบท 8.1.10 จะได้ $(-1)x = -1x = -x$ □

บทแทรก 8.1.12 $(-1)(-1) = 1$

บทพิสูจน์. โดยทฤษฎีบท 8.1.10 จะได้ $(-1)(-1) = 1(-(-1)) = 1(1) = 1$ □

ทฤษฎีบท 8.1.13 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $(-x)(-y) = xy$

บทพิสูจน์. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
 (-x)(-y) + (-xy) &= (-x)(-y) + (-x)y && \text{โดยทฤษฎีบท 8.1.10} \\
 &= (-x)[(-y) + y] && \text{โดย R6} \\
 &= (-x)0 && \text{โดย R5} \\
 &= 0 && \text{โดยทฤษฎีบท 8.1.2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(-x)(-y)$ เป็นตัวผกผันของ $-xy$ ดังนั้น $(-x)(-y) = -(-xy) = xy$ □

ทฤษฎีบท 8.1.14 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ สมมติ $xy = 0$ และ $x \neq 0$ โดย R5 จะได้ว่ามี $x^{-1} \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x^{-1}x = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 x^{-1}(xy) &= x^{-1}0 && \text{โดยสมมติฐาน} \\
 (x^{-1}x)y &= 0 && \text{โดย R3 และทฤษฎีบท 8.1.2} \\
 1y &= 0 && \text{โดย R5} \\
 y &= 0 && \text{โดย R4}
 \end{aligned}$$

□

จากทฤษฎีบทดังกล่าวทำให้นำไปใช้ในการแก้ปัญหาลักษณะต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.1.15 จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้อง $x^2 - 2x - 3 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ โดยทฤษฎีบท 8.1.14 จะได้ว่า $x-3 = 0$ หรือ $x+1 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x = 3$ หรือ $x = -1$

ตัวอย่าง 8.1.16 กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ที่สอดคล้อง $a^2 + ab - 2b^2 = 0$ จงแสดงว่า $a = b$

วิธีทำ พิจารณา $0 = a^2 + ab - 2b^2 = (a-b)(a+2b)$ เนื่องจาก $a, b \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น $a+2b \in \mathbb{R}^+$ โดย R7 จึงสรุปได้ว่า $a-b = 0$ โดยทฤษฎีบท 8.1.14 นั่นคือ $a = b$

8.2 กฎไตรวิภาค

สัจพจน์ 2 สมมติว่ามีเซต $\mathbb{R}^+$ เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ซึ่งเรียกว่า **เซตของจำนวนจริงบวก** (The set of positive real numbers) โดยมีสมบัติดังนี้

R7 **สมบัติปิด** (Closer law)

สำหรับการบวก : ทุก ๆ $x, y \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $x + y \in \mathbb{R}^+$

สำหรับการคูณ : ทุก ๆ $x, y \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$

R8 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

$$(1) \ x \in \mathbb{R}^+$$

$$(2) \ x = 0$$

$$(3) \ -x \in \mathbb{R}^+$$

บทนิยาม 8.2.1 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า x **น้อยกว่า** (Less than) y เขียนแทนด้วย $x < y$ นิยามโดย

$$x < y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad y - x \in \mathbb{R}^+$$

หรือกล่าวได้อีกอย่างว่า y **มากกว่า** (Greater than) x เขียนแทนด้วย $y > x$ และนิยาม

1. $x \leq y$ หมายถึง $x < y$ หรือ $x = y$ อ่านว่า x **น้อยกว่าหรือเท่ากับ** y

2. $x \geq y$ หมายถึง $x < y$ หรือ $x = y$ อ่านว่า x **มากกว่าหรือเท่ากับ** y

ทฤษฎีบท 8.2.2 ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

$$1. \ x \in \mathbb{R}^+$$

$$2. \ x = x - 0 \in \mathbb{R}^+$$

$$3. \ x > 0$$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$ (1) $\rightarrow$ (2) สมมติ $x \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า

$$x - 0 = x + (-0) = x + 0 = x \in \mathbb{R}^+$$

(2) $\rightarrow$ (3) สมมติ $x = x - 0 \in \mathbb{R}^+$ เนื่องจาก $x - 0 \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $x > 0$

(3) $\rightarrow$ (1) สมมติ $x > 0$ จะได้ว่า $x - 0 \in \mathbb{R}^+$ เนื่องจาก $x - 0 = x$ ดังนั้น $x \in \mathbb{R}^+$ □

จากทฤษฎีบทข้างต้น เขียนได้ว่า $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ และได้สมบัตินี้

บทแทรก 8.2.3 ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $-x \in \mathbb{R}^+$

2. $-x = 0 - x \in \mathbb{R}^+$

3. $x < 0$

จากบทแทรกนี้ทำให้นิยามจำนวนจริงลบได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 8.2.4 นิยามให้ $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ เรียกว่า เซตของจำนวนจริงลบ (The set of negative real numbers)

จากการนิยามข้างต้นจะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง x ใดก็ตาม

$$x \in \mathbb{R}^- \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad -x \in \mathbb{R}^+$$

จากทฤษฎีบทและบทนิยามที่ผ่านมาทำให้ได้สมบัติที่สำคัญทางคณิตศาสตร์คือ **กฎไตรวิภาค** (Trichotomy law) กล่าวคือ สำหรับจำนวนจริง x และ y ข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(1) $x < y$

(2) $x = y$

(3) $x > y$

ทฤษฎีบท 8.2.5 (สมบัติถ่ายทอด (Transitive law)) ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } x < y \text{ และ } y < z \text{ แล้ว } x < z$$

บทพิสูจน์. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง สมมติว่า $x < y$ และ $y < z$ จะได้ว่า $y - x \in \mathbb{R}^+$ และ $z - y \in \mathbb{R}^+$ โดย (R7) จะได้ว่า

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}^+$$

ดังนั้น $x < z$



ทฤษฎีบท 8.2.6 (สมบัติการบวกเข้าและตัดออก) ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$

2. ถ้า $x + z < y + z$ แล้ว $x < y$

บทพิสูจน์. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง

1. สมมติ $x < y$ จะได้ว่า $y - x \in \mathbb{R}^+$ แล้ว

$$(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{ดังนั้น } x + z < y + z$$

$$2. \text{ สมมติว่า } x + z < y + z \text{ แล้ว } (y + z) - (x + z) \in \mathbb{R}^+ \text{ เนื่องจาก } y - x = (y + z) - (x + z) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{ดังนั้น } x < y$$



ทฤษฎีบท 8.2.7 ให้ x, y, z และ w เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } x < y \text{ และ } z < w \text{ แล้ว } x + z < y + w$$

บทพิสูจน์. ให้ x, y, z และ w เป็นจำนวนจริง สมมติว่า $x < y$ และ $z < w$ จะได้ว่า $y - x \in \mathbb{R}^+$ และ $w - z \in \mathbb{R}^+$ โดย R3 และ R7 จะได้ว่า

$$(y + w) - (x + z) = (y - x) + (w - z) \in \mathbb{R}^+$$

ดังนั้น $x + z < y + w$ □

ทฤษฎีบท 8.2.8 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. ถ้า $x < y$ และ $z > 0$ แล้ว $xz < yz$
2. ถ้า $x < y$ และ $z < 0$ แล้ว $xz > yz$

บทพิสูจน์. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง

1. สมมติว่า $x < y$ และ $z > 0$ จะได้ว่า $y - x \in \mathbb{R}^+$ และ $z \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น

$$yz - xz = (y - x)z \in \mathbb{R}^+$$

ทำให้ได้ว่า $xz < yz$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 8.2.9 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ $x^2 \geq 0$ เมื่อนิยาม $x^2 = x \cdot x$

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนจริง จากกฎไตรวิภาคจะได้ 3 กรณีดังนี้

1. กรณีที่ $x < 0$ จะได้ว่า $-x \in \mathbb{R}^+$ โดย R7 จะได้ว่า $x^2 = x \cdot x = (-x)(-x) \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น $x^2 > 0$
2. กรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า $x^2 = 0 \cdot 0 = 0$
3. กรณีที่ $x > 0$ นั่นคือ $x \in \mathbb{R}^+$ ทำให้ได้ว่า $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น $x^2 > 0$

สรุปได้ว่า $x^2 \geq 0$ □

บทแทรก 8.2.10 สำหรับจำนวนจริง x ที่ไม่ใช่ศูนย์จะได้ว่า $x^2 > 0$ หรือ $x^2 \in \mathbb{R}^+$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 8.2.9 □

บทแทรก 8.2.11 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ ถ้า $x^2 + y^2 = 0$ แล้ว $x = 0$ และ $y = 0$

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด □

ตัวอย่าง 8.2.12 จงหาจำนวนจริง x และ y ทั้งหมดที่สอดคล้อง $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

วิธีทำ พิจารณาสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \\ &= (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \end{aligned}$$

โดยบทแทรก 8.2.11 จะได้ว่า $x + 1 = 0$ และ $y - 2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x = -1$ และ $y = 2$

ตัวอย่าง 8.2.13 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ จะได้ว่า $a^2 + b^2 \geq 2ab$

วิธีทำ จากบทแทรก 8.2.11 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 8.2.14 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนลบ จะได้ว่า

$$a^2 \leq b^2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a \leq b$$

บทพิสูจน์. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนลบ ในกรณีที่ $a = 0$ หรือ $b = 0$ เห็นได้ชัดว่า

$$0^2 \leq 0^2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 0 \leq 0$$

ให้ $a > 0$ และ $b > 0$ สมมติว่า $a^2 > b^2$ จะได้ว่า $(b^2 - a^2) \in \mathbb{R}^+$ เนื่องจาก

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

และ $(b + a) \in \mathbb{R}^+$ ทำให้ได้ว่า $(b - a) \in \mathbb{R}^+$ สรุปได้ว่า $a < b$ ในทางกลับกัน สมมติว่า $a < b$ จะได้ว่า $(b - a) \in \mathbb{R}^+$ เนื่องจาก $(b + a) \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \in \mathbb{R}^+$$

สรุปได้ว่า $a^2 > b^2$



8.3 ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม 8.3.1 ให้ x เป็นจำนวนจริงใด **ค่าสัมบูรณ์** (Absolute value) ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือจำนวนจริงที่กำหนดโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x^2| = x^2$

ทฤษฎีบท 8.3.2 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
4. $\sqrt{x^2} = |x|$
5. $x \leq |x|$

บทพิสูจน์. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. กรณีที่ $x = 0$ หรือ $y = 0$ จะได้ว่า $xy = 0$ ทำให้ได้ว่า $|xy| = 0 = |x||y|$ ให้ $x \neq 0$ และ $y \neq 0$
 ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ จะได้ว่า $xy > 0$ สรุปได้ว่า $|xy| = xy = |x||y|$
 ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$ จะได้ว่า $xy > 0$ สรุปได้ว่า $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$
 ถ้า x และ y ตัวใดตัวหนึ่งเป็นจำนวนจริงลบ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $x < 0$ และ $y > 0$ จะได้ว่า $xy < 0$ สรุปได้ว่า $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$
2. โดยข้อ 1 จะได้ว่า $|x^2| = |x \cdot x| = |x||x| = |x|^2$ และโดยข้อสังเกตข้อ 4 สรุปได้ว่า $x^2 = |x^2| = |x|^2$
3. ให้ $y \neq 0$ แสดงได้โดยง่ายว่า $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$ โดยข้อ 1 จะได้ว่า

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

4. กรณีที่ $x = 0$ เห็นได้โดยง่าย กรณีที่ $x > 0$ จะได้ว่า $\sqrt{x^2} = x$ กรณีที่ $x < 0$ จะได้ว่า $-x > 0$ ดังนั้น $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$ สรุปได้ว่า $\sqrt{x^2} = |x|$
5. ถ้า $x \leq 0$ จะได้ว่า $x \leq 0 \leq |x|$ กรณีที่ $x > 0$ จะได้ว่า $x = |x|$ สรุปได้ว่า $x \leq |x|$

□

ตัวอย่าง 8.3.3 กำหนดให้ $2 < x < 3$ จงหาค่าของ

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4x + 4} &= \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2| \\ \sqrt{x^2 - 6x + 9} &= \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|\end{aligned}$$

เนื่องจาก $2 < x < 3$ ทำให้ได้ว่า $x - 2 > 0$ และ $x - 3 < 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} &= |x - 2| + |x - 3| \\ &= (x - 2) + (-(x - 3)) \\ &= 1\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 8.3.4 (อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality)) ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

บทพิสูจน์. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง โดยทฤษฎีบท 8.3.2 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|x + y|^2 &= (x + y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &= |x|^2 + 2xy + |y|^2\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 8.3.2 ข้อ 1 และ 5 จะได้ว่า $xy \leq |xy| = |x||y|$ ดังนั้น

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

เนื่องจาก $|x + y| \geq 0$ และ $|x| + |y| \geq 0$ โดยทฤษฎีบท 8.2.14 สรุปได้ว่า

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

□

บทแทรก 8.3.5 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $|x - y| \leq |x| + |y|$
2. $|x| - |y| \leq |x + y|$
3. $|x| - |y| \leq |x - y|$

บทพิสูจน์. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. โดยอสมการสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

2. โดยอสมการสามเหลี่ยม และข้อ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x| &= |x + (y - y)| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y| \\ \therefore |x| - |y| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

3. โดยข้อ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x| - |-y| &\leq |x + (-y)| \\ \therefore |x| - |y| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 8.3.6 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

1. $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
2. $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

บทแทรก 8.3.7 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

1. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

ตัวอย่าง 8.3.8 จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องเงื่อนไข

1. $|x - 1| \leq 1$
วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x - 1| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq x - 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 1 + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x \in [0, 2] \end{aligned}$$

2. $|x - 3| > 2$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 |x - 3| > 2 &\Leftrightarrow x - 3 < -2 \text{ หรือ } x - 3 > 2 \\
 &\Leftrightarrow x - 3 + 3 < -2 + 3 \text{ หรือ } x - 3 + 3 > 2 + 3 \\
 &\Leftrightarrow x < 1 \text{ หรือ } x > 5 \\
 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, \infty)
 \end{aligned}$$

8.4 สัจพจน์ความบริบูรณ์

จำนวนจริงกับความสัมพันธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับ หรือโพเซต $(\mathbb{R}, \leq)$ ซึ่งได้กล่าวในหัวข้อ 5.3 ในหัวข้อนี้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 8.4.1 ให้ $B \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ $B \neq \emptyset$ และให้ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว

a เป็นขอบเขตบน (Upper bound) ของ B ก็ต่อเมื่อ $x \leq a$ ทุก $x \in B$

b เป็นขอบเขตล่าง (Lower bound) ของ B ก็ต่อเมื่อ $b \leq x$ ทุก $x \in B$

ถ้า B มีขอบเขตบนเรียกว่าเซต**มีขอบเขตบน** (Bounded above) ถ้า B มีขอบเขตล่างจะเรียกว่าเซต**มีขอบเขตล่าง** (Bounded below) ถ้า B มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่างจะเรียกว่าเซต **มีขอบเขต** (Bounded) ถ้าเป็นอย่างอื่นเรียกว่าเซต **ไม่มีขอบเขต** (Unbounded) กำหนดให้ B_U และ B_L แทนเซตของขอบเขตบน และขอบเขตล่างของ B ตามลำดับจะได้ว่า

$$B_U = \{a \in \mathbb{R} \mid x \leq a \text{ ทุก } x \in B\}$$

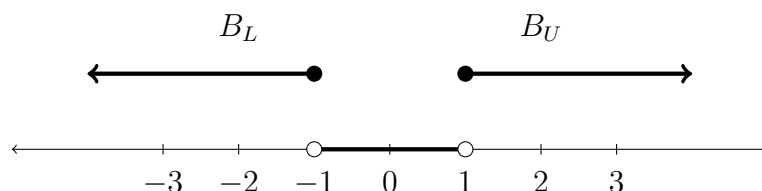
$$B_L = \{b \in \mathbb{R} \mid b \leq x \text{ ทุก } x \in B\}$$

จากนิยามจะได้ว่า $\mathbb{R}$ ไม่มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง นั่นคือ $\mathbb{R}$ ไม่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 8.4.2 จงหา B_U และ B_L ของเซต B ต่อไปนี้

1. $B = (-1, 1)$

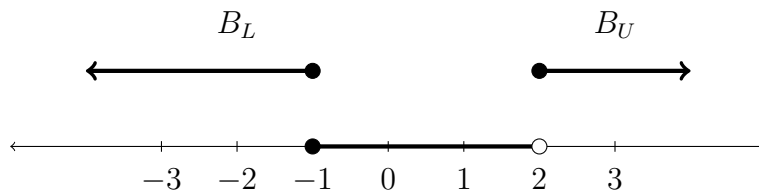
วิธีทำ



ดังนั้น $B_L = (-\infty, 1]$ และ $B_U = [1, \infty)$

2. $B = [-1, 2)$

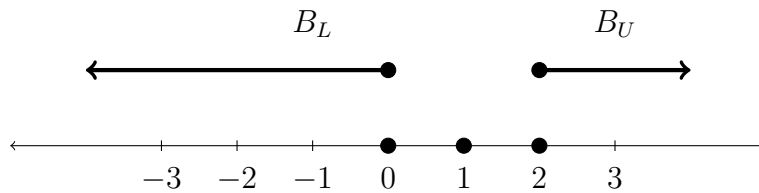
วิธีทำ



ดังนั้น $B_L = (-\infty, 1]$ และ $B_U = [2, \infty)$

3. $B = \{0, 1, 2\}$

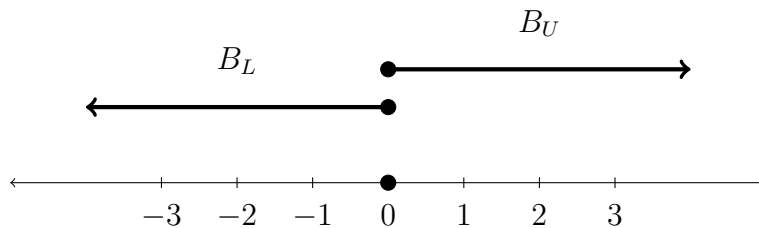
วิธีทำ



ดังนั้น $B_L = (-\infty, 0]$ และ $B_U = [2, \infty)$

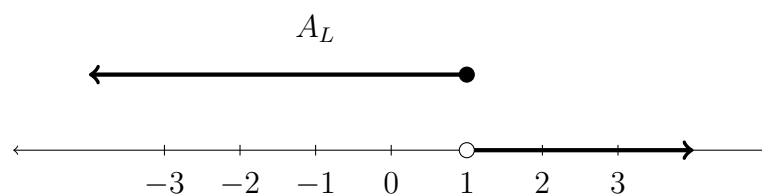
4. $B = \{0\}$

วิธีทำ



ดังนั้น $B_L = (-\infty, 0]$ และ $B_U = [0, \infty)$

ตัวอย่าง 8.4.3 เมื่อกำหนด $A = (1, \infty)$ จะได้ว่า A มีขอบเขตล่างแต่ไม่มีขอบเขตบน



เห็นได้ชัดว่า $A_L = (-\infty, 1]$ และ $A_U = \emptyset$

บทนิยาม 8.4.4 ให้ $B \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ $B \neq \emptyset$ ให้ m และ n เป็นจำนวนจริง จะเรียกว่า m ว่า **ขอบเขตบนน้อยสุด** (Least upper bound หรือ Supremum) ของ B เขียนแทนด้วย $\sup B$ ก็ต่อเมื่อ

$$(1) m \in B_U$$

$$(2) m \leq a \quad \text{ทุก } a \in B_U$$

ถ้า $\sup B$ เป็นสมาชิกใน B จะเรียกว่า **ค่าสูงสุด** (Maximum) ของ B จะเรียกว่า n ว่า **ขอบเขตล่างมากที่สุด** (Greatest lower bound หรือ Infimum) ของ B เขียนแทนด้วย $\inf B$ ก็ต่อเมื่อ

$$(1) n \in B_L$$

$$(2) b \leq n \quad \text{ทุก } b \in B_L$$

ถ้า $\inf B$ เป็นสมาชิกใน B จะเรียกว่า **ค่าต่ำสุด** (Minimum) ของ B

ตัวอย่าง 8.4.5 จากตัวอย่าง 8.4.2 จะได้ว่า

1. $\sup(-1, 1) = 1$ และ $\inf(-1, 1) = -1$
2. $\sup[-1, 2) = 2$ และ $\inf[-1, 2) = -1$ และ -1 เป็นค่าต่ำสุดของ $[-1, 2)$
3. $\sup\{0, 1, 2\} = 2$ และ $\inf\{0, 1, 2\} = 0$ และ 0 เป็นค่าต่ำสุดและ 2 เป็นค่าสูงสุดของ $\{0, 1, 2\}$
4. $\sup\{0\} = 0$ และ $\inf\{0\} = 0$ และ 0 เป็นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ $\{0\}$

ตัวอย่าง 8.4.6 ให้ $A = (-2, 1]$ จงแสดงว่า $\inf A = -2$ และ $\sup A = 1$

วิธีทำ

1. สำหรับทุก x ใน A จะได้ว่า $-2 < x \leq 1$ ดังนั้น $x \leq 1$ ทุก $x \in A$ ทำให้ได้ว่า $1 \in A_U$ ต่อไปจะแสดงว่า 1 เป็นขอบเขตบนน้อยสุด ให้ $a \in A_U$ จะได้ว่า $x \leq a$ ทุก $x \in A$ เนื่องจาก $1 \in A$ ทำให้ได้ว่า $1 \leq a$ ดังนั้น $\sup A = 1$
2. สำหรับทุก x ใน A จะได้ว่า $-2 < x \leq 1$ ดังนั้น $-2 \leq x$ ทุก $x \in A$ ทำให้ได้ว่า $-2 \in A_L$ ต่อไปจะแสดงว่า -2 เป็นขอบเขตล่างมากที่สุด ให้ $b \in A_L$ จะได้ว่า $b \leq x$ ทุก $x \in A$ จะแสดงว่า $b \leq -2$ ทุก $b \in A_L$ โดยวิธีขัดแย้ง สมมติว่ามี $b_0 \in A_L$ ซึ่ง $b_0 > -2$ สำหรับ $x \in A$ จะได้ว่า

$$-2 < b_0 < -2 < x \leq 1$$

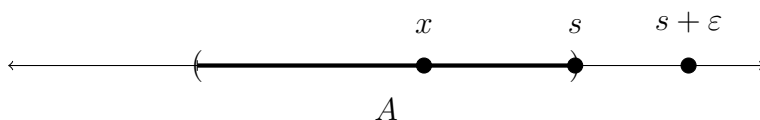
เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $b \leq -2$ ทุก $b \in A_L$ สรุปได้ว่า $\inf A = -2$

ทฤษฎีบท 8.4.7 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ $A \neq \emptyset$ แล้ว $s = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ

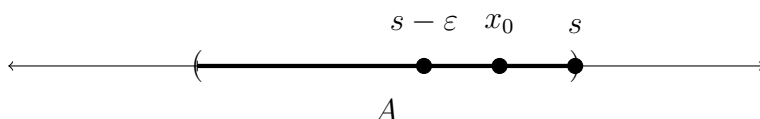
$$(1) \forall \varepsilon > 0 \forall x \in A, x < s + \varepsilon$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in A, x_0 > s - \varepsilon$$

ข้อ (1) ในทฤษฎีบทนี้หมายถึงการแสดงว่า s เป็นขอบเขตบนของ A ซึ่งแสดงได้ดังแผนภาพนี้



ข้อ (2) ในทฤษฎีบทนี้หมายถึงการแสดงว่า s เป็นขอบเขตบนน้อยสุด A ซึ่งแสดงได้ดังแผนภาพนี้



บทพิสูจน์. สมมติว่า $s = \sup A$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า s เป็นขอบเขตบนของ A และ $s < s + \varepsilon$ ดังนั้น

$$x \leq s < s + \varepsilon \quad \text{ทุก } x \in A$$

ทำให้ได้ข้อ (1) ต่อไปจะพิสูจน์ข้อ (2) โดยแบ่งกรณีของ $s - \varepsilon$

กรณีที่ 1 $s - \varepsilon \in A$ เลือก x_0 เป็นจุดกึ่งกลางของ $s - \varepsilon$ และ s นั่นคือ $x_0 = \frac{(s - \varepsilon) + s}{2} = \frac{2s - \varepsilon}{2}$

ทำให้ได้ว่า

$$s - \varepsilon < \frac{2s - \varepsilon}{2} < s \quad \text{นั่นคือ} \quad s - \varepsilon < x_0$$

กรณีที่ 2 $s - \varepsilon \notin A$ ถ้า $s - \varepsilon > x$ ทุก $x \in A$ จะได้ว่า $s - \varepsilon$ เป็นขอบเขตบนของ A และ $s - \varepsilon < s$ จะทำให้ขัดแย้งกับ s ซึ่งเป็นขอบเขตบนน้อยสุด ดังนั้น $s - \varepsilon < x$ ทุก $x \in A$ เห็นได้ชัดว่าเลือก x_0 เป็นอะไรก็ได้ใน A จะทำให้ได้ว่า $s - \varepsilon < x_0$

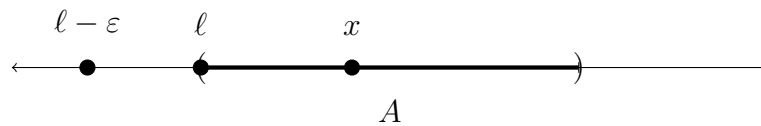
ในทางกลับกัน สมมติข้อ (1) และ (2) จะแสดงว่า $s \in A_U$ โดยวิธีขัดแย้ง สมมติว่า $s \notin A_U$ จะได้ว่า มี $y \in A$ ซึ่ง $s < y$ ดังนั้น $y - s > 0$ โดยสมมติฐานข้อ (1) จะได้ว่า $y < s + (y - s)$ หรือ $y > y$ เป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $s \in A_U$ สุดท้ายจะแสดงว่า s เป็นขอบเขตบนน้อยสุด ให้ $a \in A_U$ จะได้ว่า $x \leq a$ ทุก $x \in A$ ต้องการแสดงว่า $s \leq a$ สมมติว่า $s > a$ นั่นคือ $s - a > 0$ โดยสมมติฐาน (2) จะได้ว่ามี $x_0 \in A$ ซึ่ง $x_0 > s - (s - a)$ ทำให้ได้ว่า $x_0 > a$ เกิดข้อขัดแย้งที่ว่า a เป็นขอบเขตบนของ A ดังนั้น $s \leq a$ สรุปได้ว่า $s = \sup A$ $\square$

ทฤษฎีบท 8.4.8 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ $A \neq \emptyset$ แล้ว $\ell = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ

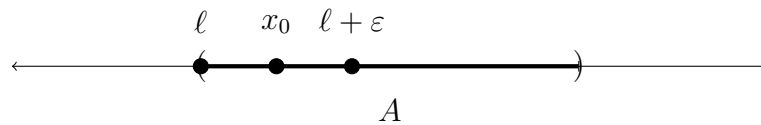
$$(1) \forall \varepsilon > 0 \forall x \in A, x > \ell - \varepsilon$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in A, x_0 < \ell + \varepsilon$$

ข้อ (1) ในทฤษฎีบทนี้หมายถึงการแสดงว่า ℓ เป็นขอบเขตล่างของ A ซึ่งแสดงได้ดังแผนภาพนี้



ข้อ (2) ในทฤษฎีบทนี้หมายถึงการแสดงว่า ℓ เป็นขอบเขตล่างมากที่สุด A ซึ่งแสดงได้ดังแผนภาพนี้



บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

จะเห็นว่าทฤษฎีบท 8.4.7 และ 8.4.8 สอดคล้องกับบทนิยาม 8.4.4 เป็นอีกวิธีหนึ่งในการตรวจสอบค่าขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากที่สุดของเซตที่สนใจ ซึ่งในหนังสือบางเล่มอาจจะนิยามขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากที่สุดตามทฤษฎีบททั้งสองดังกล่าว

ตัวอย่าง 8.4.9 ให้ $A = (-2, 1]$ จงแสดงว่า $\inf A = -2$ และ $\sup A = 1$ โดยใช้ทฤษฎีบท 8.4.7 และ 8.4.8

1. ให้ $\varepsilon > 0$ และ $x \in A$ จะได้ว่า $-2 < x \leq 1 < 1 + \varepsilon$ ดังนั้นข้อ (1) เป็นจริง เลือก $x_0 = 1 \in A$ จะได้ว่า $1 > 1 - \varepsilon$ ดังนั้น (2) เป็นจริง สรุปได้ว่า $\sup A = 1$
2. ให้ $\varepsilon > 0$ และ $x \in A$ จะได้ว่า $-2 - \varepsilon < -2 < x \leq 1$ ดังนั้นข้อ (1) เป็นจริง เนื่องจาก $-2 < -2 + \varepsilon$ พิจารณา 2 กรณีคือ

$$\text{กรณีที่ } -2 < -2 + \varepsilon \leq 1 \text{ เลือก } x_0 = \frac{-2 + (-2 + \varepsilon)}{2} = \frac{-4 + \varepsilon}{2} \text{ ทำให้ได้ว่า}$$

$$x_0 \in A \text{ และ } -2 < x_0 < -2 + \varepsilon$$

$$\text{กรณีที่ } -2 + \varepsilon > 1 \text{ เลือก } x_0 \in A \text{ ทำให้ได้ว่า } x_0 \leq 1 \text{ ดังนั้น } x_0 \leq 1 < -2 + \varepsilon$$

สรุปได้ว่า $\inf A = -2$

ทฤษฎีบท 8.4.10 สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Completeness axiom)

ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า

1. ถ้า A มีขอบเขตล่าง แล้ว A จะมีขอบเขตล่างมากที่สุด
2. ถ้า A มีขอบเขตบน แล้ว A จะมีขอบเขตบนน้อยสุด

บทพิสูจน์. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง

1. สมมติว่า A มีขอบเขตล่าง นั่นคือ $A_L \neq \emptyset$ จะได้ว่า

$$\forall x \in A \forall a \in A_L, a \leq x$$

จะแสดงว่ามี $\ell \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a \leq \ell \leq x$ ทุก ๆ $x \in A$ และ ทุก ๆ $a \in A_L$ แล้วจะทำให้ได้ว่า $\ell = \inf A$
สมมติว่า ไม่มี $\ell \in \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\forall x \in A \forall a \in A_L, a \leq \ell \leq x$ ดังนั้น

$$\text{ทุก ๆ } \ell \in \mathbb{R} \text{ จะมี } x_0 \in A \text{ และ } a_0 \in A_L \text{ ซึ่ง } \ell < a_0 \text{ หรือ } \ell > x_0$$

กรณีที่ $\ell > x_0$ แสดงว่า ℓ ไม่ใช่ขอบเขตล่างของ A ทุก ๆ $\ell \in \mathbb{R}$ ขัดแย้งกับสมมติฐาน

กรณีที่ $\ell < a_0$ เนื่องจาก $x_0 \in \mathbb{R}$ เมื่อ $\ell = x_0$ ทำให้ได้ว่า $x_0 \leq a_0$ เกิดข้อขัดแย้งกับ a_0 ที่เป็นขอบเขตล่างของ A เพราะว่า $x_0 \in A$ ดังนั้น มี $\ell \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\forall x \in A \forall a \in A_L, a \leq \ell \leq x$ เห็นได้ชัดว่า $\ell = \inf A$

2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 1 (ทำเป็นแบบฝึกหัด)

□

ทฤษฎีบท 8.4.11 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $s = \sup(A)$ จะได้ว่า

$$\text{ทุก ๆ } x \in \mathbb{R} \text{ ถ้า } x < s \text{ แล้วจะมี } a \in A \text{ ซึ่ง } x < a \leq s$$

บทพิสูจน์. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $s = \sup(A)$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ สมมติว่า $x < s$

$$\text{กรณี } x \in A \text{ จะได้ว่า } x \leq s \text{ เลือก } a = \frac{x+s}{2} \text{ นั่นคือ } x < \frac{x+s}{2} < s \text{ ทำให้ได้ว่า } x < a \leq s$$

กรณี $x \notin A$ เนื่องจาก $x < s$ และ s เป็นขอบเขตบนของ A ดังนั้น $x < a$ ทุก ๆ $a \in A$
สรุปได้ว่า $x < a \leq s$

□

ทฤษฎีบท 8.4.12 ให้ $A \subseteq \mathbb{Z}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง ถ้า A มีขอบเขตบน แล้ว A จะมีค่าสูงสุด

บทพิสูจน์. ให้ $A \subseteq \mathbb{Z}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง สมมติว่า A มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์จะได้ว่า A มีขอบเขตบนน้อยสุด ให้ $m = \sup A$ จะแสดงว่า $m \in \mathbb{Z}$ แล้วจะได้ว่า m เป็นค่าสูงสุดของ A สมมติ $m \notin \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $m \notin A$ และ $n < m$ ทุก ๆ $n \in A$ เนื่องจาก $A \neq \emptyset$ และ $m - 1 < m$ โดยทฤษฎีบท 8.4.7 ข้อ (2) จะได้ว่ามี $m_0 \in A$ ซึ่ง $m - 1 < m_0 < m$ เกิดข้อขัดแย้งกับสมบัติจำนวนเต็ม

□

ทฤษฎีบท 8.4.13 หลักการของอาร์คิมิดีส (Archimedean principle)

ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $x < n$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$ ในกรณีที่ $x < 1$ เลือก $n = 2$ จะได้ว่า $x < 1 < 2 = n$ เหลือพิสูจน์ในกรณีที่ $x \geq 1$ ให้ $x \geq 1$ และ

$$S = \{b \in \mathbb{N} \mid b \leq x\}$$

เนื่องจาก $1 \in S$ ดังนั้น $S \neq \emptyset$ และมีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่ามีขอบเขตบนน้อยสุด ให้ $m = \sup S$ โดยทฤษฎีบท 8.4.7 จะได้ว่ามี $a \in S$ ซึ่ง $m - 1 < a$ (เลือก $\varepsilon = 1$) ให้ $n = a + 1$ เนื่องจาก $a \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $n \in \mathbb{N}$ และ $m < n$ ทำให้ได้ว่า $n \notin S$ สรุปได้ว่า $n > x$

□

บทแทรก 8.4.14 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $x \neq 0$ แล้วจะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $y < nx$

บทพิสูจน์. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ โดยที่ $x \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{y}{x}$ เป็นจำนวนจริง โดยหลักการของอาร์คิมิดีส จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\frac{y}{x} < n$ นั่นคือ $y < nx$

□

บทแทรก 8.4.15 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $\frac{1}{n} < x$

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\frac{1}{x}$ เป็นจำนวนจริง โดยหลักการของอาร์คิมิดีส จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\frac{1}{x} < n$ นั่นคือ $\frac{1}{n} < x$

□

ทฤษฎีบท 8.4.16 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ถ้า $0 \leq x < \frac{1}{n}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $x = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$ สมมติ $0 \leq x < \frac{1}{n}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ สมมติ $x > 0$ โดยบทแทรก 8.4.15 จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < x$ เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน ดังนั้น $x = 0$

□

ตัวอย่าง 8.4.17 ให้ $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ จงแสดงว่า $\inf A = 0$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดว่า $0 < \frac{1}{n}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น 0 เป็นขอบเขตล่างของ A สมมติ 0 ไม่ใช่ขอบเขตล่างมากที่สุดของ A ดังนั้นมีขอบเขตบน x ซึ่ง $0 < x < \frac{1}{n}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยทฤษฎีบท 8.4.16 จะได้ว่า $x = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\inf A = 0$

□

จะเห็นได้ว่า $(\mathbb{R}, \leq)$ เป็นโพเซตซึ่งได้กล่าวในหัวข้อ 5.3 เมื่อพิจารณาเฉพาะจำนวนเต็มบวกโพเซตกับความสัมพันธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับ $(\mathbb{N}, \leq)$ เป็นเซตแบบเรียงอันดับไว้ดีแล้ว (Well-ordering set) ซึ่งมีความสมเหตุสมผลและถือเป็นสัจพจน์อีกหนึ่งข้อ เรียกว่า **หลักการจัดอันดับดี (Well ordering principle)**

ให้ S เป็นสับเซตของ $\mathbb{N}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า S มีสมาชิกตัวเล็กสุด

กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ

ถ้า $S \subseteq \mathbb{N}$ และ $S \neq \emptyset$ แล้วมี $a \in S$ ซึ่ง $a \leq s$ ทุก ๆ $s \in S$

ทฤษฎีบท 8.4.18 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $x < y$ จะได้ว่ามีจำนวนตรรกยะ a ซึ่ง $x < a < y$

บทพิสูจน์. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ จะได้ว่า $y > 0$ และ $y - x > 0$ โดยบทแทรก 8.4.15 มี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $0 < \frac{1}{n} < y - x$ ให้

$$S = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \frac{m}{n} \geq y \right\}$$

โดยบทแทรก 8.4.14 จะได้ว่า $S \neq \emptyset$ เนื่องจาก $S \subseteq \mathbb{N}$ โดยหลักการจัดอันดับดีจะได้ว่า S มีสมาชิกตัวเล็กสุดเรียกว่า m_0 เลือก $a = \frac{m_0 - 1}{n}$ เนื่องจาก $m_0 - 1 < m_0$ และ m_0 เป็นสมาชิกตัวเล็กสุดใน S ดังนั้น $a = \frac{m_0 - 1}{n} < y$ เนื่องจาก $y \leq \frac{m_0}{n}$ จะได้

$$y - \frac{1}{n} < \frac{m_0}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m_0 - 1}{n} = a$$

เนื่องจาก $x < y - \frac{1}{n}$ ดังนั้น $x < a$ สรุปได้ว่า $x < a < y$

กรณีที่ 2 $x < 0$ ถ้า $y > 0$ เลือก $a = 0$ จะได้ว่า $x < 0 < y$ ถ้า $x < y \leq 0$ ทำให้ได้ว่า $0 \leq -y < -x$ โดยกรณีที่ 1 จะได้ว่ามีจำนวนตรรกยะ b ซึ่ง $-y < b < -x$ ดังนั้น $x < a < y$ โดยให้ $a = -b$ ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะ □

ทฤษฎีบท 8.4.19 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $x < y$ จะได้ว่ามีจำนวนอตรรกยะ a ซึ่ง $x < a < y$

บทพิสูจน์. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

กรณีที่ 1 $0 \leq x < y$ แล้วจะได้ว่า $\frac{x}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{y}{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนจริง โดยทฤษฎีบท 8.4.18 จะได้ว่ามีจำนวนตรรกยะ b ซึ่ง $\frac{x}{\sqrt{2}} < b < \frac{y}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $b \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $b\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ และ

$$x < b\sqrt{2} < y$$

เลือก $a = b\sqrt{2}$ ดังนั้น $x < a < y$

กรณีที่ 2 $x < 0 < y$ โดยกรณีที่ 1 จะได้ว่ามีจำนวนอตรรกยะ a ซึ่ง $0 < a < y$ ดังนั้น $x < a < y$

กรณีที่ 3 $x < y \leq 0$ แล้ว $0 < -y < -x$ โดยกรณีที่ 1 จะได้ว่ามีจำนวนอตรรกยะ b ซึ่ง $-y < b < -x$ ดังนั้น $x < a < y$ เมื่อ $a = -b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ □

8.5 การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนจริง

ระบบจำนวนจริงมีการเรียนในหลายระดับในชั้นมัธยมแตกต่างกันไป เนื้อหามีความหลากหลาย แต่ในบทเรียนนี้จะเน้นไปที่สมบัติจำนวนจริง กฎไตรวิภาค ค่าสัมบูรณ์ และความบริบูรณ์ของจำนวนจริง ซึ่งเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูง และมีส่วนสอดคล้องในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ในการเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 4 สายที่เน้นวิทยาศาสตร์ ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
ม.2	2. เข้าใจจำนวนจริงและความสัมพันธ์ของจำนวนจริง และใช้สมบัติของจำนวนจริงในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง	จำนวนจริง - จำนวนอตรรกยะ - จำนวนจริง
ม.4 เน้น วิทยาศาสตร์	3. เข้าใจจำนวนจริง และใช้สมบัติของจำนวนจริงในการแก้ปัญหา	จำนวนจริงและพหุนาม - จำนวนจริงและสมบัติจำนวนจริง - ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงและสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง

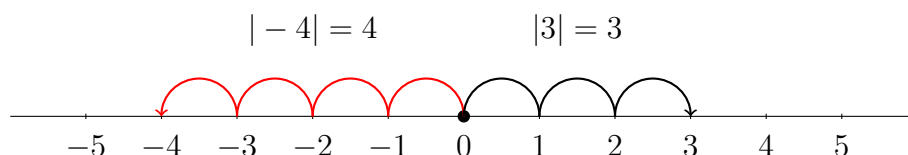
ตารางที่ 29 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางของเรื่องจำนวนจริง

ตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E

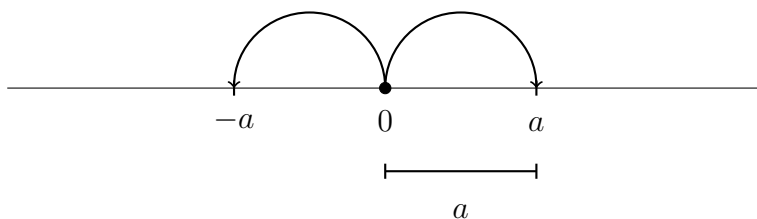
ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการสอนสาระการเรียนรู้ "การหาคำตอบของสมการค่าสัมบูรณ์โดยใช้เส้นจำนวน" เป็นการเรียนรู้การใช้นิยามของค่าสัมบูรณ์โดยวัดระยะทางบนเส้นจำนวน เพื่อให้เกิดมโนทัศน์แล้วขยายไปยังปัญหาที่ซับซ้อนได้ ทำได้ 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นสร้างความสนใจ

นำเข้าสู่บทเรียนโดยทบทวนนิยามของค่าสัมบูรณ์โดยใช้เส้นจำนวนเป็นตัวอธิบายกล่าวคือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือระยะทางจาก x ไปยัง 0 ตัวอย่างเช่น $|-4|$ หมายถึงระยะทางจาก 0 ไปยัง -4 มีค่าเท่ากับ 4 หน่วย และ $|3|$ หมายถึงระยะทางจาก 0 ไปยัง 3 เท่ากับ 3 หน่วย ดังภาพ

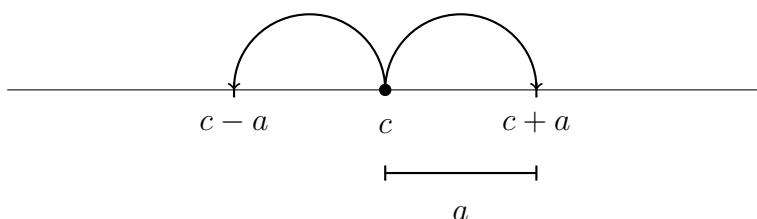


และนำไปสู่ $|x| = a$ เมื่อ $a \geq 0$ แล้วค่า x คือจุดบนเส้นจำนวนที่อยู่ห่างจาก 0 (เป็นจุดศูนย์กลาง) เป็นระยะ a หน่วย (รัศมี) ดังรูป



ดังนั้นจะได้ว่า $x = a$ หรือ $x = -a$

ขยายแนวคิดไปยังกรณีทั่วไป $|x - c| = a$ ค่า x คือจุดบนเส้นจำนวนที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง c เป็นระยะรัศมี a หน่วย ดังรูป



จะสรุปได้ว่า $x = a + c$ หรือ $x = c - a$

2. ขั้นสำรวจค้นหา

แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มๆ ละ 2 คน โดยแจกบัตรคำถามทั้งหมด 1 ใบประกอบไปด้วยคำถาม 10 ข้อให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำโดยใช้เส้นจำนวนในเวลา 20 นาที ตัวอย่างบัตรคำถาม

1. $|x| = 2$

6. $|x - 2| = 4$

2. $|x| = 0$

7. $|1 - x| = 3$

3. $|x| = -1$

8. $|2x - 1| = 1$

4. $|x - 1| = 1$

9. $|1 - 3x| = 4$

5. $|x + 1| = 0$

10. $|x^2 + 1| = 5$

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

ให้แต่ละกลุ่มข้อสรุปคำตอบ และออกมาอภิปรายคำตอบที่ได้ แล้วนักเรียนในชั้นสรุปความคิดรวบยอดซึ่งมีครูคอยชี้แนะ สรุปได้ดังนี้

1. กรณี $|x| = 0$ มีคำตอบเดียวคือ $x = 0$

2. กรณี $|x| = a$ เมื่อ $a < 0$ ไม่มีคำตอบ

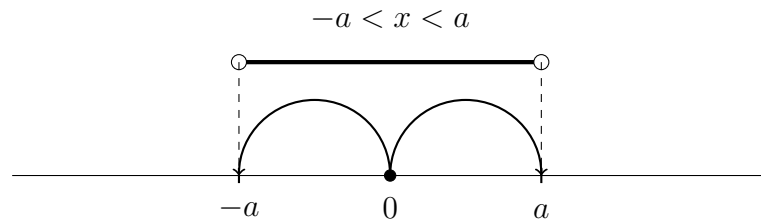
3. กรณี $|f(x) - c| = a$ มีคำตอบเป็น $f(x) = c + a$ หรือ $f(x) = c - a$

3. กรณี $|ax - c| = b$ เมื่อ $a \neq 0$ ต้องจัดรูปเป็น $\left|x - \frac{c}{a}\right| = \frac{b}{a}$ แล้วหาคำตอบได้ตามปกติ

4. ขั้นขยายความรู้

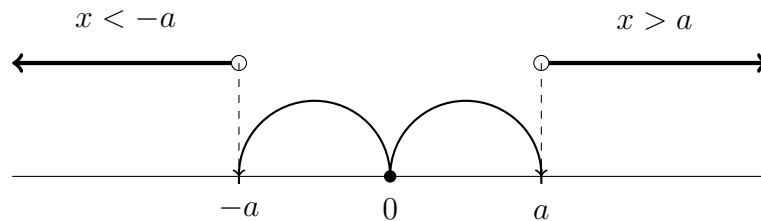
ครูแสดงโจทย์ของอสมการค่าสัมบูรณ์เพื่อขยายแนวคิด ดังตัวอย่าง

(ก) $|x| < a$ แล้วค่า x คือจุดบนเส้นจำนวนที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง c เป็นระยะที่น้อยกว่ารัศมี a หน่วย ดังรูป



ดังนั้น $-a < x < a$

(ข) $|x| > a$ แล้วค่า x คือจุดบนเส้นจำนวนที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง c เป็นระยะที่มากกว่ารัศมี a หน่วย ดังรูป



ดังนั้น $x < -a$ หรือ $x > a$

5. ขั้นประเมิน

ให้นักเรียนทำใบงานรายบุคคล

สรุป

เริ่มต้นเซตของจำนวนจริงที่มีการดำเนินการบวกและคูณซึ่งสอดคล้อง สมบัติปิด สมบัติสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการมีเอกลักษณ์ สมบัติการมีตัวผกผัน และสมบัติการกระจาย เรียกว่าสัจพจน์สนาม สำหรับจำนวนจริงจะมีสมบัติสอดคล้องกฎไตรวิภาคกล่าวคือ สำหรับจำนวนจริง x และ y ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

$$(1) \ x < y$$

$$(2) \ x = y$$

$$(3) \ x > y$$

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงคือระยะทางบนเส้นจำนวนจากศูนย์ไปยังจำนวนนั้น ทำให้ได้สมการสามเหลี่ยมคือ $|x + y| \leq |x| + |y|$ ซึ่งเป็นสมบัติที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูง และศึกษาความบริบูรณ์ของจำนวนจริงกล่าวถึงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของสับเซตของจำนวนจริง ทำให้ได้ข้อเท็จจริงที่ว่าสับเซตของจำนวนจริงที่ไม่ใช่เซตว่างถ้ามีขอบเขตบน จะได้ว่ามีขอบเขตบนน้อยสุด ถ้ามีขอบเขตล่างจะมีขอบเขตล่างมากที่สุด แล้วนำไปพิสูจน์หลักการของอาร์คิมิดีสที่มีใจความว่า

ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $x < n$

แล้วส่งผลให้ได้สมบัติที่สำคัญของจำนวนจริงคือระหว่างสองจำนวนจริงใดๆจะมีจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะแทรกอยู่เสมอ

คำถามท้ายบท

1. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1.1 $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$

1.2 ถ้า $x + y = x$ แล้ว $x = 0$

1.3 ถ้า $xy = y$ และ $x \neq 0$ แล้ว $y = 1$

1.4 ถ้า $x = x^{-1}$ และ $x \neq 0$ แล้ว $x = 1$ หรือ $x = -1$

1.5 $x(y - z) = xy - xz$

1.6 ถ้า $y \neq 0$ แล้ว $\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$

2. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

2.1 ถ้า $x < y$ และ $z < 0$ แล้ว $xz > yz$

2.4 ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

2.2 ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$ แล้ว $xy > 0$

2.5 ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $x^2 < y^2$

2.3 ถ้า $x > 0$ แล้ว $x^{-1} > 0$

2.6 ถ้า $x \leq y$ และ $x \geq y$ แล้ว $x = y$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการ

3.1 $|x + 1| = 4$

3.6 $|x - 6| = |3 - 2x|$

3.12 $||2x - 1| - 1| = 2$

3.2 $|3x + \frac{1}{3}| = 3$

3.7 $|1 - x| = 1 - x$

3.13 $||x| - |2x + 1|| = -x$

3.3 $|x^2 - 20| = 5$

3.8 $|2x + 1| = x$

3.14 $\left| \frac{x+2}{x+3} \right| = 2$

3.4 $|x^2 - 4| = 0$

3.10 $|x + 1| + 2 = |3x + 1|$

3.5 $|3x - 1| = |2x + 1|$

3.11 $|x + 2| = 1 + |x - 3|$

3.15 $\frac{|5x - 1|}{5x - 1} + 4x = 0$

4. จงหาเซตคำตอบของสมการ

4.1 $|x + 1| < 4$

4.4 $|12x + 5| \leq 7$

4.7 $|x^2 - 5x| \geq 5x$

4.2 $|2x + 1| > 3$

4.5 $|x^2 + x| < |x + 4|$

4.8 $|4x + 3| \leq |5x + 3|$

4.3 $\left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 3$

4.6 $|x + 2| \leq 3 - |x + 1|$

4.9 $(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$

5. จงหาเซตของขอบเขตบน ค่าขอบเขตบนน้อยสุด เซตของขอบเขตล่าง และค่าขอบเขตล่างมากที่สุด (ถ้ามี) และพิสูจน์คำตอบเหล่านั้น

5.1 $A = [1, 3]$

5.4 $A = (-\infty, -3)$

5.7 $A = \mathbb{Q}$

5.2 $A = (-1, 5)$

5.5 $A = \{1\} \cup (2, 5)$

5.8 $A = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

5.3 $A = (2, \infty)$

5.6 $A = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$

5.9 $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

6. จงหาขอบเขตบนน้อยสุด และขอบเขตล่างมากที่สุดของ $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ และพิสูจน์เพื่อยืนยันคำตอบ

7. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และนิยาม $-A = \{-x \mid x \in A\}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

7.1 ถ้า a เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $-a$ เป็นขอบเขตล่างของ $-A$

7.2 ถ้า $s = \sup(A)$ แล้ว $-s = \inf(-A)$

7.3 ถ้า a เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $-a$ เป็นขอบเขตบนของ $-A$

7.4 ถ้า $\ell = \inf(A)$ แล้ว $-\ell = \sup(-A)$

8. ให้ A และ B เป็นสับเซตของจำนวนจริงซึ่ง $A \neq \emptyset$ และ $A \subseteq B$ โดยที่ B เป็นเซตมีขอบเขต จงพิสูจน์

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

9. กำหนดให้ $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$ เมื่อ $\alpha \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $\sup(A_\alpha) = \alpha$

10. จงพิสูจน์ว่า $\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |a - b| < \frac{1}{n}$

11. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง a ถ้า $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$ แล้ว $a = 0$

12. สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $|x - y| < \varepsilon$ ทุก $\varepsilon > 0$ แล้ว $x = y$

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ชวลิต บุรพาศิริวัฒน์. (2538). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏจันทรเกษม
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2558). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: วี.พริ้นท์(1991)
- สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. (2559). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา**. กรุงเทพฯ: สหมิตรพริ้นติ้ง แอนด์พับลิชชิ่ง จำกัด
- อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **ตรรกศาสตร์และระบบจำนวนจริง**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์
- Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 9

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน
2. มอดุลัสและสังยุค
3. กราฟของจำนวนเชิงซ้อน
4. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
5. การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจการดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อนและนำเสนอสมบัติไปใช้ได้
2. รู้จักมอดุลัสและสังยุคและสามารถพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องได้
3. สามารถเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนได้
4. สามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้
5. นำสมบัติเกี่ยวกับเชิงขั้วไปใช้แก้ปัญหาได้
6. รู้จักการจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- 1.2 ใช้สื่อทางอินเทอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
- 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
- 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
- 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย
- 2.4 ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ทดสอบความเข้าใจในเนื้อหา
- 2.5 มอบหมายให้ทำ assignment เพื่อส่งท้ายคาบ

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ตรวจ assignment บันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกลงในใบบันทึกผลงาน

บทที่ 9

จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเบื้องต้น จำนวนเชิงซ้อนได้เกิดขึ้นมานานเท่าไรก็ยังไม่หลักฐานแน่ชัด แต่นักคณิตศาสตร์คาดการณ์ได้โดยเริ่มต้นจากการขบคิดปัญหาของสมการ ซึ่งในตอนนั้นไม่มีจำนวนจริงใดที่ทำให้สมการเป็นจริง

- ค.ศ. 50 เฮอรอน (Heron) แห่งอเล็กซานเดีย ได้ศึกษาการวัดปริมาตรส่วนที่เป็นไปไม่ได้ของพีระมิด คือจำนวน $\sqrt{81 - 114}$ ซึ่งสร้างความสับสนให้เขา แต่ก็ยังไม่สามารถหาคำอธิบายได้
- ค.ศ. 1500 นักคณิตศาสตร์ก็มีการศึกษาการหารากของพหุนามกำลังสอง กำลังสาม และกำลังสี่ ซึ่งได้รากที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สองของจำนวนที่เป็นลบ ซึ่งโดยปกติแล้วมันอธิบายไม่ได้ในทางธรรมชาติ
- ค.ศ. 1545 กิโรลาโม คาร์ดาโน (Girolamo Cardano) ได้เขียนหนังสือชื่อ Ars Magna ในนั้นมีการหาคำตอบของสมการ $x(10 - x) = 40$ ซึ่งมีคำตอบเป็น $5 + \sqrt{-15}$ และ $5 - \sqrt{-15}$ ถึงแม้จะมีคำตอบสำหรับสมการนี้ แต่ก็ยังไม่อธิบายไม่แจ่มชัดในทางคณิตศาสตร์ ยังคงเป็นปัญหาที่ชวนให้ต้องหาคำตอบ
- ค.ศ. 1637 เรอเน เดการ์ต (René Descartes) ได้นำเสนอการเขียนคำตอบของสมการที่หาไม่ได้ในรูป $a + bi$ นั่นก็คือติดในรูปจำนวนจินตภาพ (Imaginary number) นิวตันเองก็เห็นด้วยกับเดการ์ต และ Albert Girard ก็เรียกผลเฉลยลักษณะแบบนี้ว่า "ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ (Solutions impossible)" ถึงแม้ว่าผู้คนยังไม่ยอมรับแนวคิดนี้เท่าที่ควร แต่นักคณิตศาสตร์ก็ยังเชื่อว่า i น่าจะมีอยู่จริง
- ค.ศ. 1777 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ได้กำหนดสัญลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$ เพื่อให้ได้เข้าใจเกี่ยวกับจำนวนแบบนี้ง่ายขึ้น และสำหรับ $\theta \in \mathbb{R}$ ได้กำหนด

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

เรียกว่าสูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) ต่อมา มีบทบาทสำคัญมากในคณิตศาสตร์สมัยใหม่

- ค.ศ. 1831 โยฮันน์ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Johann Carl Friedrich Gauss) ได้ศึกษาและอธิบาย $a + bi$ ที่เดการ์ตได้ให้สัญลักษณ์ไว้ เขาได้ศึกษาอย่างเอาจริงเอาจัง และเรียกจำนวนนี้ว่า จำนวนเชิงซ้อน (Complex number) ซึ่งเป็นที่ยอมรับอย่างกว้างขวางในวงการคณิตศาสตร์

- ค.ศ. 1833 วิลเลียม โรเวน ฮามิลตัน (William Rowan Hamilton) ได้เขียน $a + bi$ ในรูปคู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) หลังจากนั้นก็มีนักคณิตศาสตร์มากมายศึกษาจำนวนเชิงซ้อน เช่น Karl Weierstrass, Hermann Schwarz, Richard Dedekind, Otto Holder และ Henri Poincare เป็นต้น จนเป็นแขนงหนึ่งในคณิตศาสตร์เรียกว่า การวิเคราะห์จำนวนเชิงซ้อน (complex analysis)

9.1 การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 9.1.1 จะเรียก ai ว่าจำนวนจินตภาพ (Imaginary number) เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ และ $i = \sqrt{-1}$ กรณีที่ $a = 1$ จะเรียกว่าจำนวนจินตภาพหนึ่งหน่วย (Unit imaginary number)

ข้อสังเกต $i^2 = -1$

ตัวอย่าง 9.1.2 จำนวนต่อไป $\sqrt{-4}, \sqrt{-9}, -\sqrt{-1}, \sqrt{-2}$ เขียนได้เป็น

$$\sqrt{-4} = 2i$$

$$\sqrt{-9} = 3i$$

$$-\sqrt{-1} = -i$$

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$$

ต่อไปจะพิจารณา i^n เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ โดย

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (1)i = i$$

$$\vdots$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\vdots$$

สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ จะได้ว่า

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n \equiv 0 \pmod{4} \\ i & \text{เมื่อ } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{เมื่อ } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{เมื่อ } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

กำหนดให้ $n \equiv a \pmod{4}$ หมายถึง $4 \mid (a - n)$ เมื่อ $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ หรือกล่าวได้โดยง่ายว่าเมื่อ 4 หาร n เหลือเศษ 0, 1, 2 และ 3 จะได้ว่า i^n เท่ากับ 1, i , -1 และ $-i$ ตามลำดับนั่นเอง

ตัวอย่าง 9.1.3 จงหาผลบวก $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017}$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + i^4 &= i + (-1) + (-i) + 1 = 0 \\ i^5 + i^6 + i^7 + i^8 &= i + (-1) + (-i) + 1 = 0 \\ i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12} &= i + (-1) + (-i) + 1 = 0 \\ &\vdots \\ i^{2013} + i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} &= i + (-1) + (-i) + 1 = 0 \end{aligned}$$

$i^{2017} = i$ เพราะว่า $2017 \equiv 1 \pmod{4}$ สรุปได้ว่า

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017} = i$$

บทนิยาม 9.1.4 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ จะเรียกจำนวน z ที่เขียนในรูป

$$z = a + bi$$

ว่าจำนวนเชิงซ้อน (Complex number) เรียก a ว่า **ส่วนจริง (Real part)** ของ z เขียนแทนด้วย $\text{Re}(z)$ และเรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ (Imaginary part)** ของ z เขียนแทนด้วย $\text{Im}(z)$ ให้ $\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ จะได้ว่า $a = a + 0i \in \mathbb{C}$ ดังนั้น $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ยิ่งไปกว่านั้น $\mathbb{R}$ เป็นสับเซตแท้ของ $\mathbb{C}$

บทนิยาม 9.1.5 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$a + bi = c + di \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = c \quad \text{และ} \quad b = d$$

จากนิยามข้างต้น $a + bi \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$

ตัวอย่าง 9.1.6 จงหาจำนวนจริง x และ y ที่สอดคล้อง $x + 2yi + y - xi = 3 - 5i + yi$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} x + 2yi + y - xi &= 3 - 5i + yi \\ (x + y) + (2y - x)i &= 3 + (y - 5)i \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + y = 3$ และ $2y - x = y - 5$ สรุปได้ว่า $x = 4$ และ $y = -1$

บทนิยาม 9.1.7 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง กำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ แล้ว

การบวก (Addition) $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

การลบ (Subtraction) $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

การคูณ (Multiplication) $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$

การหาร (Division) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$ เมื่อ $z_2 \neq 0$ หรือ $c \neq 0$ หรือ $d \neq 0$

ข้อสังเกต สำหรับการคูณ

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + cbi + bdi^2 \\ &= ac + adi + cbi + bd(-1) \\ &= ac + adi + cb - bd \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i \end{aligned}$$

ดังนั้นการคูณในจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับการคูณในจำนวนจริงโดยพิจารณาค่าของ $i^2 = -1$ สำหรับการหาร
พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} \\ &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

ดังนั้นการหารในจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับการหารในจำนวนจริง

ตัวอย่าง 9.1.8 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$

- $(2 + 3i) + (5 - 2i) = 7 + i$
- $(-1 + 5i) - (7 - 2i) = -8 + 7i$
- $(5 - i)(3 + 4i) = 15 + 20i - 3i - 4i^2 = 19 + 17i$
- $(1 - 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$
- $\frac{3 + i}{1 - i} = \frac{3 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{3 + 3i + i + i^2}{1^2 - i^2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$

ตัวอย่าง 9.1.9 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$

1. $(1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = [1 + 2i + i^2]^{10} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10} = -1024$
2. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{0}{2} = 0$

ตัวอย่าง 9.1.10 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จงแสดงว่า

$$\frac{a+bi}{b-ai} = i$$

บทพิสูจน์. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{a+bi}{b-ai} &= \frac{a+bi}{b-ai} \cdot \frac{b+ai}{b+ai} = \frac{(a+bi)(b+ai)}{(b-ai)(b+ai)} \\ &= \frac{ab + a^2i + b^2i + abi^2}{b^2 - (ai)^2} = \frac{ab + a^2i + b^2i - ab}{b^2 - a^2i^2} \\ &= \frac{a^2i + b^2i}{b^2 + a^2} = \frac{i(a^2 + b^2)}{b^2 + a^2} = i \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 9.1.11 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$$\frac{1+2i}{2-i} + \frac{2+3i}{3-2i} + \frac{3+4i}{4-3i} + \cdots + \frac{2559+2560i}{2560-2559i}$$

วิธีทำ โดยตัวอย่าง 9.1.10 จะได้ว่าทุกพจน์เท่ากับ i ซึ่งมีทั้งหมด 2559 พจน์ ดังนั้น

$$\frac{1+2i}{2-i} + \frac{2+3i}{3-2i} + \frac{3+4i}{4-3i} + \cdots + \frac{2559+2560i}{2560-2559i} = 2559i$$

ทฤษฎีบท 9.1.12 สำหรับการดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\cdot$ ในจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติคล้ายสัจพจน์สนามในระบบจำนวนจริง ดังนี้

(C1) **สมบัติปิด (Closer laws)**

สำหรับการบวก : ทุก $z, w \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $z + w \in \mathbb{C}$

สำหรับการคูณ : ทุก $z, w \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $z \cdot w \in \mathbb{C}$

(C2) **สมบัติสลับที่ (Commutative laws)**

สำหรับการบวก : ทุก $z, w \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $z + w = w + z$

สำหรับการคูณ : ทุก $z, w \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $z \cdot w = z \cdot w$

(C3) **สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative laws)**

สำหรับการบวก : ทุก $z, w, u \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $(z + w) + u = z + (w + u)$

สำหรับการคูณ : ทุก $z, w, u \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u)$

(C4) สมบัติการมีเอกลักษณ์ (Existence of identities)

สำหรับการบวก : มี $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z + 0 = z = 0 + z$ ทุก $z \in \mathbb{C}$
เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวก (Additive identity)

สำหรับการคูณ : มี $1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$ ทุก $z \in \mathbb{C}$
เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์การคูณ (Multiplicative identity)

(C5) สมบัติการมีตัวผกผัน (Existence of inverses)

สำหรับการบวก : สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ จะมี $-z \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $z + (-z) = 0 = (-z) + z$
เรียก $-z$ ว่าตัวผกผันการบวกของ z

สำหรับการคูณ : สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z \neq 0$ จะมี $z^{-1} \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$
เรียก z^{-1} ว่าตัวผกผันการคูณของ z

(C6) สมบัติการแจกแจง (Distributive law)

สำหรับ $z, w, u \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

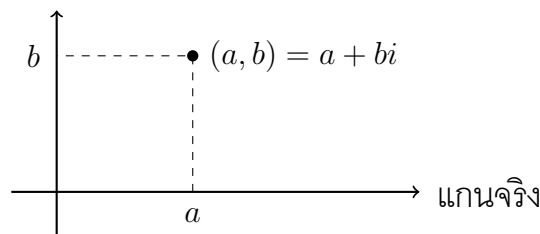
$$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u \quad \text{และ} \quad (w + u) \cdot z = w \cdot z + u \cdot z$$

เพื่อความสะดวก zw แทน $z \cdot w$

9.2 มอดุลัสและสังยุค

บทนิยาม 9.2.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ เขียนแทนด้วยคู่อันดับจำนวนจริง (a, b) เรียกระนาบที่เกิดจากจุดดังกล่าวว่า **ระนาบเชิงซ้อน** (Complex plane) แกน X เรียกว่า **แกนจริง** (Real axis) และแกน Y เรียกว่า **แกนจินตภาพ** (Imaginary axis)

แกนจินตภาพ



รูปที่ 41 แสดงจุด (a, b) บนระนาบเชิงซ้อน

บทนิยาม 9.2.2 ให้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว **มอดุลัส** (Modulus) ของ z เขียนแทนด้วย $|z|$ นิยามโดย

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

สังยุค (Conjugate) ของ z เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ นิยามโดย

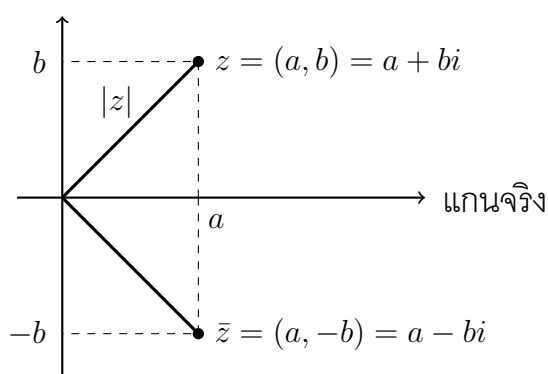
$$\bar{z} = a - bi$$

ข้อสังเกต

1. $|z| \geq 0$ และ $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = 0$
2. $|z| = |\bar{z}|$ และ $|z| = |-z|$
3. $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ และ $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

เมื่อพิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ ในแนวเวกเตอร์จะได้ว่า $|z|$ หมายถึงขนาดของเวกเตอร์ (a, b) ดังภาพ และ $\bar{z}$ คือจุดที่สะท้อนแกนจริง ทำให้ได้ว่า $|z| = |\bar{z}|$ ดังภาพ

แกนจินตภาพ



รูปที่ 42 แสดงสังยุคและมอดุลัสบนระนาบเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 9.2.3 จงหามอดุลัสและสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $z = 3 + 4i$ จะได้ว่า $\bar{z} = 3 - 4i$ และ $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
2. $w = 1 - 2i$ จะได้ว่า $\bar{w} = 1 + 2i$ และ $|w| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

สำหรับกรณี $z = \bar{z}$ ให้ $z = a + bi$ จะได้ว่า $a + bi = a - bi$ นั่นคือ $b = -b$ สรุปได้ว่า $b = 0$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนจริงแท้ และกรณี $|z| = z$ จะได้ว่า

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + bi$$

ดังนั้น $b = 0$ และ $a = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = |a| \geq 0$ สรุปได้ว่า z เป็นจำนวนจริงแท้ที่ไม่ใช่จำนวนลบ

ทฤษฎีบท 9.2.4 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
2. $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
3. $\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$

บทพิสูจน์. ให้ $z = a + bi$ และ $w = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(c^2 + d^2)} \\ &= |z| \cdot |w| \end{aligned}$$

2. ให้ $z \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z} \right| &= \left| \frac{1}{a + bi} \right| = \left| \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \right| = \left| \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right| \\ &= \left| \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|} \end{aligned}$$

3. ให้ $z \neq 0$ โดยข้อ 1 และข้อ 2 จะได้ว่า

$$\left| \frac{w}{z} \right| = \left| w \cdot \frac{1}{z} \right| = |w| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = |w| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{|w|}{|z|}$$



ตัวอย่าง 9.2.5 จงหามอดุลัสของ z ที่สอดคล้องเงื่อนไข $(5 - 12i)\bar{z}(4 - 3i) = -13(7 + 24i)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |(5 - 12i)\bar{z}(4 - 3i)| &= |-13(7 + 24i)| \\ |5 - 12i| \cdot |\bar{z}| \cdot |4 - 3i| &= |-13| \cdot |7 + 24i| \\ \sqrt{5^2 + (-12)^2} \cdot |z| \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2} &= 13\sqrt{7^2 + 24^2} \\ 13|z|(5) &= 13(25) \\ |z| &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น มอดุลัสของ z เท่ากับ 5

ทฤษฎีบท 9.2.6 ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จะได้ว่า $|z^n| = |z|^n$

บทพิสูจน์. พิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เมื่อ $n = 1$ เห็นได้ชัดว่า $|z^1| = |z| = |z|^1$ ดังนั้นขั้นฐานเป็นจริง สมมติว่า $|z^k| = |z|^k$ สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ โดยทฤษฎีบท 9.2.4 ข้อ 1 จะได้ว่า

$$|z^{k+1}| = |z^k \cdot z| = |z^k| \cdot |z|$$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า $|z^{k+1}| = |z|^k \cdot |z| = |z|^{k+1}$ ดังนั้นขั้นอุปนัยเป็นจริง □

ตัวอย่าง 9.2.7 โดยทฤษฎีบท 9.2.6 จะได้ว่า $|(3 + 4i)^{100}| = |3 + 4i|^{100} = 5^{100}$

ทฤษฎีบท 9.2.8 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ เมื่อ $w \neq 0$
5. $\overline{(\bar{z})} = z$
6. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

บทพิสูจน์. ให้ $z = a + bi$ และ $w = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

1. $\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z - w} = \overline{(a + bi) - (c + di)} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i = (a - bi) - (c - di) = \bar{z} - \bar{w}$
- 3.

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}\end{aligned}$$

4. ให้ $w \neq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \overline{\left(\frac{a + bi}{c + di}\right)} = \overline{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i\right)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i = \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{(a - bi)(c + di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}\end{aligned}$$

5. $\overline{(\bar{z})} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$

6. ทำเป็นแบบฝึกหัด (พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

□

ทฤษฎีบท 9.2.9 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ จะได้ว่า $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

บทพิสูจน์. ให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

□

ตัวอย่าง 9.2.10 ให้ $z = 1 + i$ จงหาค่าของ $z^{2016} + (\bar{z})^{2016}$

พิจารณา z^{2016} จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z^{2016} &= (1 + i)^{2016} = [(1 + i)^2]^{1008} = [1 + 2i + i^2]^{1008} = (2i)^{1008} \\ &= 2^{1008} i^{1008} = 2^{1008} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(\bar{z})^{2016} = \overline{(z^{2016})} = \overline{(2^{1008})} = 2^{1008}$ ดังนั้น

$$z^{2016} + (\bar{z})^{2016} = 2^{1008} + 2^{1008} = 2 \cdot 2^{1008} = 2^{1009}$$

ตัวอย่าง 9.2.11 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{ถ้า } \operatorname{Im}(z - w) = 0 \text{ และ } \operatorname{Re}(z^2 - 2w^2) = 0 \text{ จงแสดงว่า } z \cdot \bar{z} = \frac{1}{2}(w + \bar{w})^2$$

บทพิสูจน์. ให้ $z = a + bi$ และ $w = c + di$ เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ สมมติว่า $\operatorname{Im}(z - w) = 0$ และ $\operatorname{Re}(z^2 - 2w^2) = 0$ จะได้ว่า

$$0 = \operatorname{Im}(z - w) = \operatorname{Im}(a + bi - c - di) = b - d$$

ทำให้ได้ว่า $b = d$ พิจารณา

$$\begin{aligned} z^2 - 2w^2 &= (a + bi)^2 - 2(c + di)^2 = (a + bi)^2 - 2(c + bi)^2 \\ &= a^2 + 2abi + b^2 i^2 - 2(c^2 + 2cbi + b^2 i^2) \\ &= a^2 + 2abi - b^2 - 2c^2 - 4cbi + 2b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2c^2 + 2abi - 4cbi \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\operatorname{Re}(z^2 - 2w^2) = 0$ จะได้ว่า $a^2 + b^2 - 2c^2 = 0$ นั่นคือ $a^2 + b^2 = 2c^2$ ดังนั้น

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 = 2c^2 = \frac{1}{2}[2\operatorname{Re}(w)]^2 = \frac{1}{2}(w + \bar{w})^2$$

□

ทฤษฎีบท 9.2.12 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1. |z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$

$$2. |z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$

บทพิสูจน์. ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. โดยทฤษฎีบท 9.2.8 และทฤษฎีบท 9.2.9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \end{aligned}$$

2. ทำเป็นแบบฝึกหัด

□

บทแทรก 9.2.13 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1. |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

$$2. |z - w|^2 - |z + w|^2 = 4\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากทฤษฎีบท 9.2.12

□

ตัวอย่าง 9.2.14 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1 + z_2| = 5$ และ $|z_1 - z_2| = 3$ จงหา $|z_1|^2 + |z_2|^2$
โดยบทแทรก 9.2.13 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 &= |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \\ 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 &= 5^2 + 3^2 = 34 \\ \therefore |z_1|^2 + |z_2|^2 &= 17 \end{aligned}$$

บทตั้ง 9.2.15 ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วจะได้ว่า

$$1. \operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

$$2. \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

บทพิสูจน์. ให้ $z = a + bi$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ \operatorname{Im}(z) &= b \leq |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 9.2.16 อสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality)

ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z + w| \leq |z| + |w|$

บทพิสูจน์. ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยทฤษฎีบท 9.2.12 และบทตั้ง 9.2.15 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z| \cdot |\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $|z + w| \leq |z| + |w|$

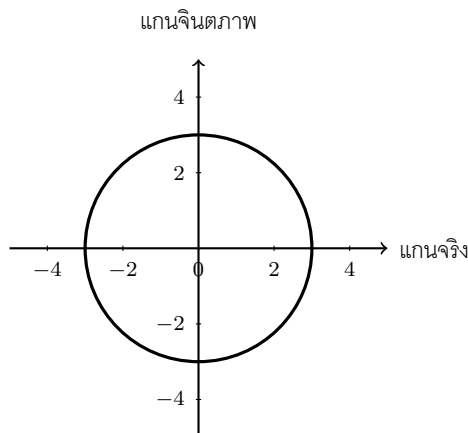
**9.3 กราฟของจำนวนเชิงซ้อน**

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ ในรูปของคู่อันดับ (x, y) เป็นจุดบนระนาบเชิงซ้อน ทำให้มองสมการต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อนสัมพันธ์เป็นกราฟได้ โดยที่

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{และ} \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad \text{และ} \quad x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

เมื่อกล่าวถึง z ในหัวข้อนี้ให้หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 9.3.1 จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องสมการ $|z| = 3$ จะได้กราฟเป็นวงกลม เนื่องจาก $|z|^2 = x^2 + y^2$ ดังนั้น $x^2 + y^2 = 3^2$ เขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 9.3.2 จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องสมการ $|z - 3| + |z + 3| = 10$ พิจารณาจากสมการจะได้ว่าผลบวกของระยะทาง z ไปยัง $(-3, 0)$ และ $(0, 3)$ มีค่าเท่ากับ 10 ซึ่งตรงกับนิยามวงรีในระนาบ XY ต่อไปเราจะพิสูจน์ประโยคที่กล่าวมา

$$|z - 3| + |z + 3| = 10$$

$$|x + yi - 3| + |x + yi + 3| = 10$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = 10$$

$$(\sqrt{(x - 3)^2 + y^2}) = (10 - \sqrt{(x + 3)^2 + y^2})^2$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} + (x + 3)^2 + y^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 100 - 20\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} + x^2 + 6x + 9$$

$$5\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = 25 + 3x$$

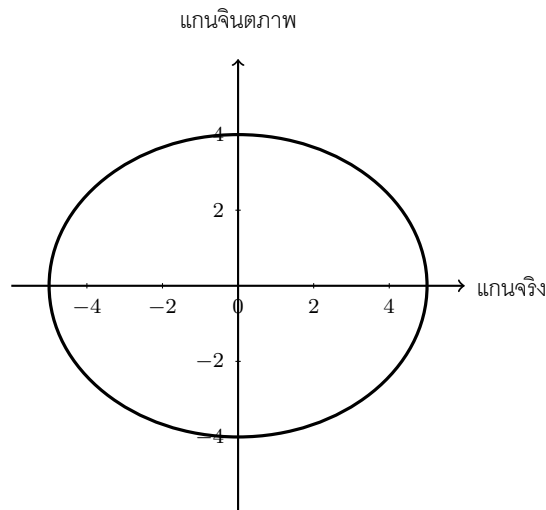
$$25[(x + 3)^2 + y^2] = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25[x^2 + 6x + 9 + y^2] = 625 + 150x + 9x^2$$

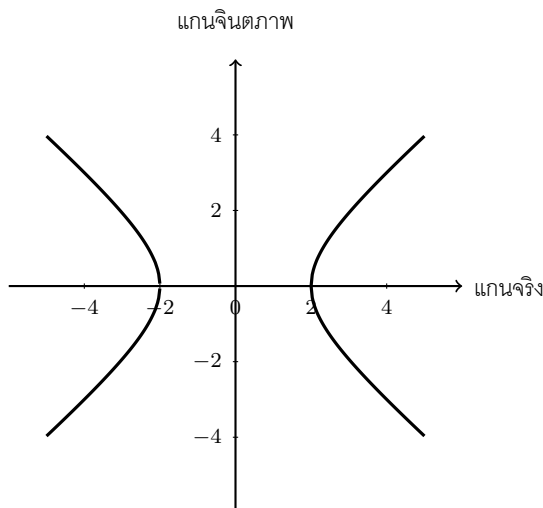
$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

แสดงกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 9.3.3 จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องสมการ $||z - 2| - |z + 2|| = 2$ พิจารณาจากสมการจะได้ว่าผลต่างของระยะทาง z ไปยัง $(-2, 0)$ และ $(0, 2)$ มีค่าเท่ากับ 2 ซึ่งตรงกับนิยามไฮเพอร์โบลาในระนาบ XY พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ (ทำเป็นแบบฝึกหัด) เขียนกราฟได้ดังนี้



ต่อไปเป็นตัวอย่างการเขียนสมการตัวแปร x, y ในรูป $z = x + yi$ เช่นสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เขียนได้เป็น $|z| = 1$ และ $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ เขียนได้เป็น $|z - i| = 3$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 9.3.4 จงเขียนสมการ $x^2 - y^2 = 1$ ในรูปสมการจำนวนเชิงซ้อน z จะได้ว่า

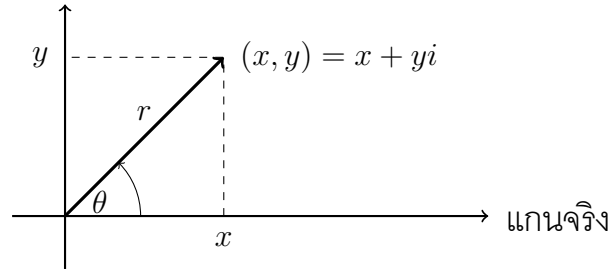
$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)^2 - \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right)^2 &= 1 \\ \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 + \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 &= 1 \\ (z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 &= 4 \\ 2z^2 + 2\bar{z}^2 &= 4 \\ z^2 + \bar{z}^2 &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 - y^2 = 1$ เขียนได้เป็น $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

9.4 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

บทนิยาม 9.4.1 ให้จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ และมอดุลัสคือ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

แกนจินตภาพ



รูปที่ 43 แสดงความสัมพันธ์จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

อาร์กิวเมนต์ (Argument) ของ z คือจำนวนจริง θ เขียนแทนด้วย $\arg(z)$ ซึ่ง

$$x = r \cos \theta \quad \text{และ} \quad y = r \sin \theta$$

สังเกตได้ว่า $\arg(z)$ มีได้หลายค่า ถ้าสนใจเฉพาะ $-\pi < \theta \leq \pi$ จะเรียก θ ว่า**อาร์กิวเมนต์หลัก (Principle argument)** เขียนแทนด้วย $\text{Arg}(z)$

ดังนั้นจะสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ได้เป็น

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{หรือ} \quad z = r e^{i\theta}$$

เมื่อ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ เรียกว่า**สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula)**

ดังนั้น $|e^{i\theta}| = 1$ และ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใน **ระบบพิกัดเชิงขั้ว (The polar coordinate system)** โดยระบุจุดด้วยคู่อันดับ (r, θ)

ตัวอย่าง 9.4.2 เขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปแบบเชิงขั้วโดย $r = |z|$ และ $\theta = \text{Arg}(z)$

1. $z = 1$ จะได้ว่า $z = 1(1 + 0i) = \cos 0 + i \sin 0$ หรือ $z = e^{i0}$
2. $z = -2i$ จะได้ว่า $z = 2(0 - i) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$ หรือ $z = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$
3. $z = 1 + i$ จะได้ว่า $z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ หรือ $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
4. $z = \sqrt{3} - i$ จะได้ว่า $z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$ หรือ $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

สำหรับข้อ 2 และ 4 จะสังเกตได้ว่า $z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ และ $z = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ ตามลำดับ เป็นรูปแบบเชิงขั้วอีกแบบหนึ่งที่มีอาร์กิวเมนต์เป็นบวกแต่ไม่เป็นอาร์กิวเมนต์หลักตามที่โจทย์กำหนด

ตัวอย่าง 9.4.3 จากตัวอย่าง 9.4.2 จะได้ว่า

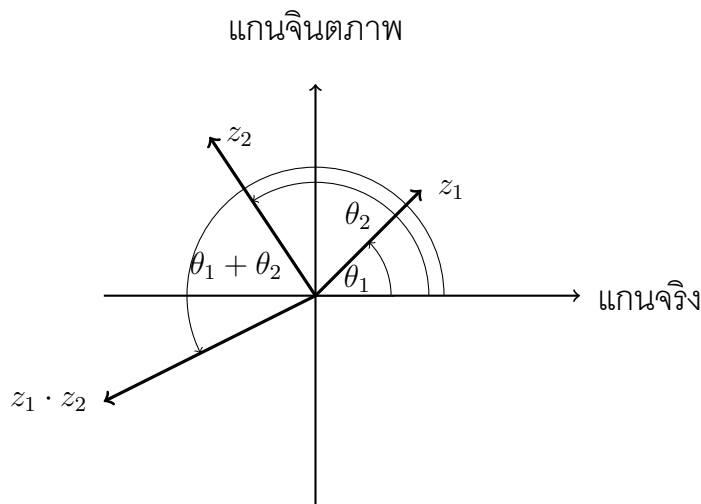
1. $(1, 0)$ ในระบบพิกัดฉาก (ระนาบเชิงซ้อน) ตรงกับ $(1, 0)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว
2. $(0, -2)$ ในระบบพิกัดฉาก (ระนาบเชิงซ้อน) ตรงกับ $(2, -\frac{\pi}{2})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว
3. $(1, 1)$ ในระบบพิกัดฉาก (ระนาบเชิงซ้อน) ตรงกับ $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว
4. $(\sqrt{3}, -1)$ ในระบบพิกัดฉาก (ระนาบเชิงซ้อน) ตรงกับ $(2, -\frac{\pi}{6})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 9.4.4 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $x + yi$

1. $4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3} + 2i$
2. $6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 6 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$
3. $4e^{i\frac{5\pi}{2}} = 4(0 + i) = 4i$
4. $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$

ทฤษฎีบท 9.4.5 ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$
2. $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} [\cos (-\theta_2) + i \sin (-\theta_2)]$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$ เมื่อ $z_2 \neq 0$



รูปที่ 44 แสดงผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

บทพิสูจน์. ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ แล้ว

1.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1r_2[\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2] \\ &= r_1r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

2. ให้ $z_2 \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\cos (-\theta_2) + i \sin (-\theta_2)}{\cos^2 \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2} \\ &= \frac{1}{r_2} [\cos (-\theta_2) + i \sin (-\theta_2)] \end{aligned}$$

3. ให้ $z_2 \neq 0$ โดยข้อ 1 และข้อ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \frac{1}{r_2} [\cos (-\theta_2) + i \sin (-\theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 9.4.6 จงเขียน $\frac{(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{\sqrt{3}+i}$ ในรูป $x + yi$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{\sqrt{3}+i} &= \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

จากการสังเกตทฤษฎีบท 9.4.5 ข้อ 1 เมื่อพิจารณา

$$z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1^2(\cos 2\theta_1 + i \sin 2\theta_1)$$

ทำให้ขยายแนวคิดไปสู่ z_1^n เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งเสนอครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อว่า เดอว์มัวร์ (Abraham de Moivre: 1667-1754) รู้จักกันในชื่อทฤษฎีบทเดอว์มัวร์ (De Moivre's theorem)

ทฤษฎีบท 9.4.7 ทฤษฎีบทเดอว์มัวร์

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จะได้ว่า

$$z^n = r^n(\cos (n\theta) + i \sin (n\theta))$$

บทพิสูจน์. พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ กรณี $n = 1$ เห็นได้ชัด ดังนั้นขั้นฐานเป็นจริง สมมติว่า

$$z^k = r^k(\cos (k\theta) + i \sin (k\theta))$$

สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ โดยสมมติฐานและทฤษฎีบท 9.4.5 ข้อ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \\ &= r^k(\cos (k\theta) + i \sin (k\theta)) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r^{k+1}(\cos (k\theta + \theta) + i \sin (k\theta + \theta)) \\ &= r^{k+1}(\cos ((k+1)\theta) + i \sin ((k+1)\theta)) \end{aligned}$$

ดังนั้นขั้นอุปนัยเป็นจริง □

ตัวอย่าง 9.4.8 จงหาค่าของ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2017}$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2017} &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2017} = \cos \frac{2017\pi}{3} + i \sin \frac{2017\pi}{3} \\ &= \cos \left(672\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(672\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 9.4.9 จงหาค่าของ
$$\frac{(\sqrt{3} - i)^{102}(-1 + i)^{2018}}{(1 + \sqrt{3}i)^{1111}}$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3} - i)^{102}(-1 + i)^{2018}}{(1 + \sqrt{3}i)^{1111}} &= \frac{\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right)^{102} \left(\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^{2018}}{\left(2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^{1111}} \\ &= \frac{2^{102} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{102} \sqrt{2}^{2018} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{2018}}{2^{1111} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{1111}} \\ &= \frac{2^{102} \left(\cos\left(-\frac{102\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{102\pi}{6}\right)\right) 2^{1009} \left(\cos\frac{6054\pi}{4} + i\sin\frac{6054\pi}{4}\right)}{2^{1111} \left(\cos\frac{1111\pi}{3} + i\sin\frac{1111\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{2^{1111} \left(\cos(-17\pi) + i\sin(-17\pi)\right) \left(\cos\frac{3027\pi}{2} + i\sin\frac{3027\pi}{2}\right)}{2^{1111} \left(\cos\frac{1111\pi}{3} + i\sin\frac{1111\pi}{3}\right)} \\ &= \cos\left(-17\pi + \frac{3027\pi}{2} - \frac{1111\pi}{3}\right) + i\sin\left(-17\pi + \frac{3027\pi}{2} - \frac{1111\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(1126\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(1126\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

พิจารณารากในจำนวนจริง เช่น รากที่ 2 ของ 1 คือ 1 และ -1 เพราะว่า $1^2 = 1$ และ $(-1)^2 = 1$ แต่รากที่ 3 ของ 1 คือ 1 เพียงรากเดียวเท่านั้นในจำนวนจริง เพราะว่า $1^3 = 1$ แต่สำหรับจำนวนเชิงซ้อนแล้วจะหารากได้อีกสองดังนี้

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad \text{และ} \quad w = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ซึ่ง $z^3 = w^3 = 1$ นำเสนอโดยเดอว์มัวร์รู้จักกันในชื่อ กฎเดอว์มัวร์ (De Moivre's Law)

บทนิยาม 9.4.10 ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ $n \in \mathbb{N}$

จะเรียก w ว่า **ราก (root)** ที่ n ของ z ก็ต่อเมื่อ $w^n = z$

บทตั้ง 9.4.11 ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ แล้วจะได้ว่า

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n} \right)$$

บทพิสูจน์. ให้ $w = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n} \right)$ โดยทฤษฎีบทเดอว์มัวร์จะได้

$$w^n = \left[r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n} \right) \right]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z$$

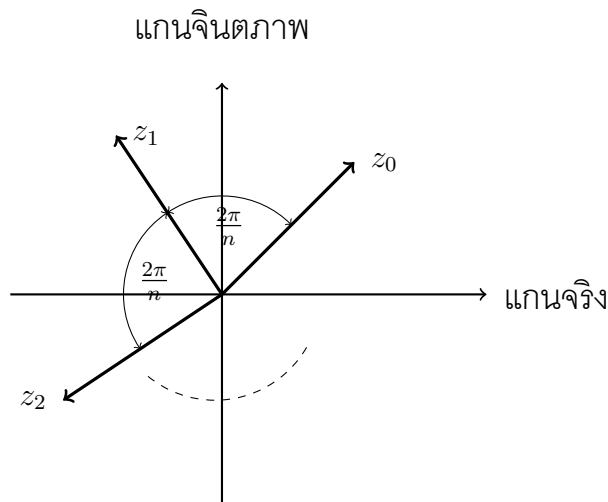
ดังนั้น $z^{\frac{1}{n}} = w$



ทฤษฎีบท 9.4.12 กฎของเดอมัวร์

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วรากที่ n ของ z คือ

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad \text{เมื่อ} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$



รูปที่ 45 แสดงรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนบนระบบพิกัดเชิงซ้อน

บทพิสูจน์. เราจะพิสูจน์อย่างคร่าว ๆ สำหรับ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เนื่องจาก $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2k\pi)$ และ $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2k\pi)$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม k โดยบทตั้ง 9.4.11 จะได้ว่า

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi))$$

$$z_k = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

เลือกจำนวนเต็ม k ที่ทำให้รากแตกต่างกันได้ n จำนวนคือ $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ □

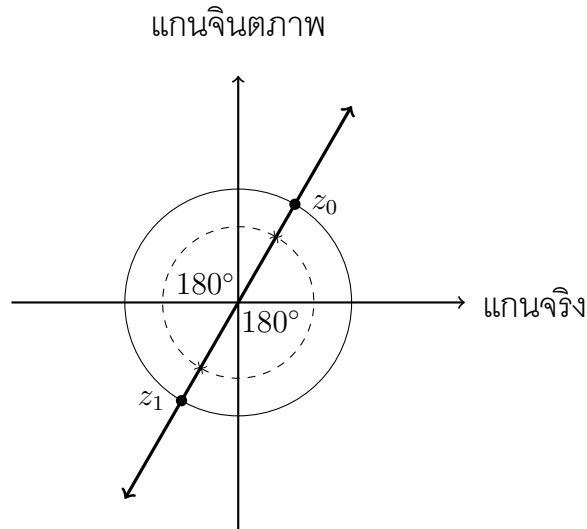
ตัวอย่าง 9.4.13 รากที่ 2 ของ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

วิธีทำ ให้ $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ ดังนั้น

$$z_0 = \cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{2} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = \cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

แสดงตำแหน่งของรากที่ 2 ของ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ บนกราฟได้ดังนี้



ข้อสังเกต ในกรณีรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนจะเป็นจำนวนที่ต่างกัน 180 องศา นั่นคือ ถ้า z_0 เป็นรากที่สองของ z รากที่สองอีกรากคือ $z_1 = -z_0$

ตัวอย่าง 9.4.14 รากที่ 3 ของ 1

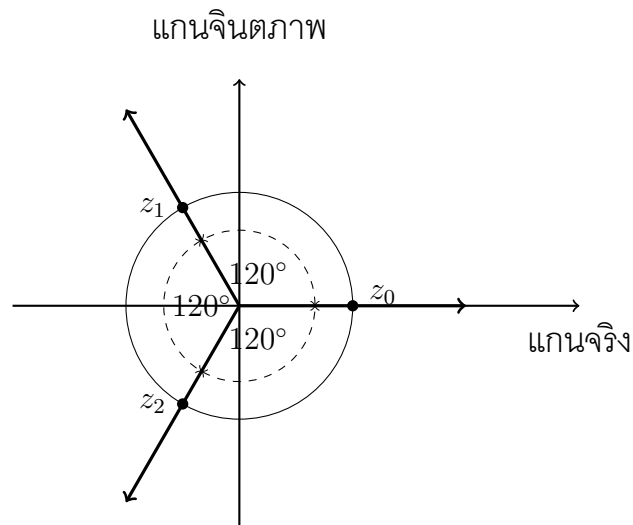
วิธีทำ ให้ $z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ ดังนั้น

$$z_0 = \cos \frac{0+0}{3} + i \sin \frac{0+0}{3} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos \frac{0+2\pi}{3} + i \sin \frac{0+2\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \cos \frac{0+4\pi}{3} + i \sin \frac{0+4\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

แสดงตำแหน่งของรากที่ 3 ของ 1 บนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 9.4.15 รากที่ 6 ของ -1

วิธีทำ ให้ $z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$ ดังนั้น

$$z_0 = \cos \frac{\pi + 0}{6} + i \sin \frac{\pi + 0}{6} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

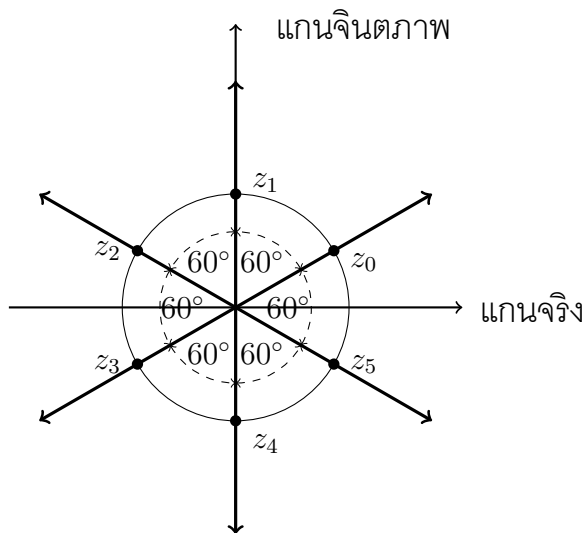
$$z_2 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \cos \frac{\pi + 6\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{6} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_4 = \cos \frac{\pi + 8\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 8\pi}{6} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$z_5 = \cos \frac{\pi + 10\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 10\pi}{6} = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

แสดงตำแหน่งของรากที่ 3 ของ -1 บนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 9.4.16 รากที่ 2 ของ $-7 + 24i$ คือจำนวนใด

วิธีทำ ให้ $z = -7 + 24i$ จะได้ว่า $r = |z| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = 25$ และ $\theta = \text{Arg}(z)$ ซึ่งอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 และ $\tan \theta = -\frac{24}{7}$ ทำให้ได้ว่า $\cos \theta = -\frac{7}{25}$ ดังนั้น

$$z = 25(\cos \theta + i \sin \theta)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_0 &= 25^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta + 0}{2} + i \sin \frac{\theta + 0}{2} \right) \\ &= 5 \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ดังนั้น $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} z_0 &= 5 \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \right) \\ &= 5 \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} \right) \\ &= 3 + 4i \end{aligned}$$

รากที่สองอีกรากก็คือ $z_1 = -z_0 = -3 - 4i$

9.5 การจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มีดังนี้
สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
ม.5 เน้น วิทยาศาสตร์	1. เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา 2. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1	จำนวนเชิงซ้อน - จำนวนเชิงซ้อน และสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน - จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว - รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1

ตารางที่ 30 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางของเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

โดยเนื้อหาจะเน้นไปที่ความรู้เบื้องต้นและสัญลักษณ์พื้นฐาน ในการเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เน้นวิทยาศาสตร์

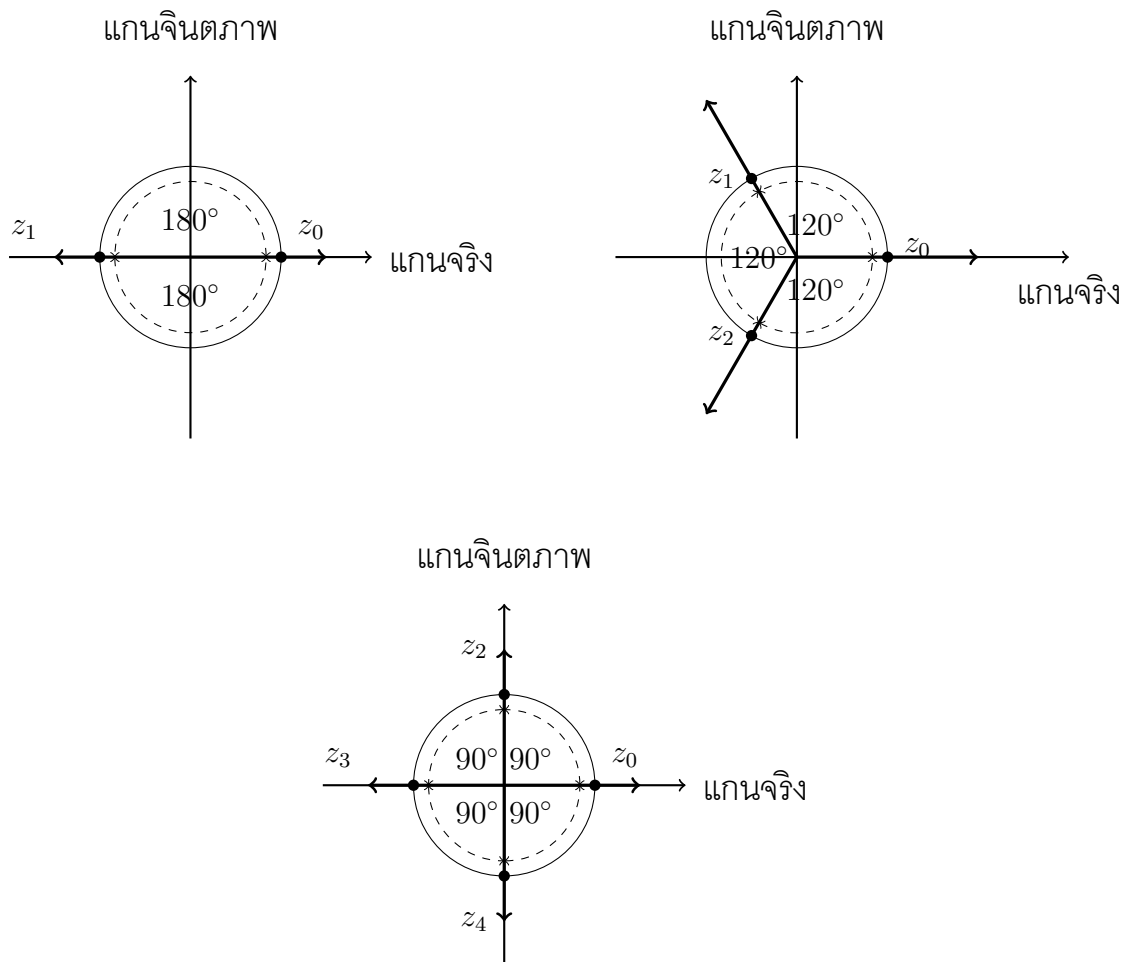
ตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ 5E

ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการสอนสาระการเรียนรู้ "การรากของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย" โดยนำหลักการในทฤษฎีบทของเดอมัวร์มาเขียนรากทั้งหมดบนวงกลมหนึ่งหน่วย เพื่อให้เข้าใจและเห็นถึงความสัมพันธ์ในแต่ละราก ซึ่งทำได้ 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นสร้างความสนใจ

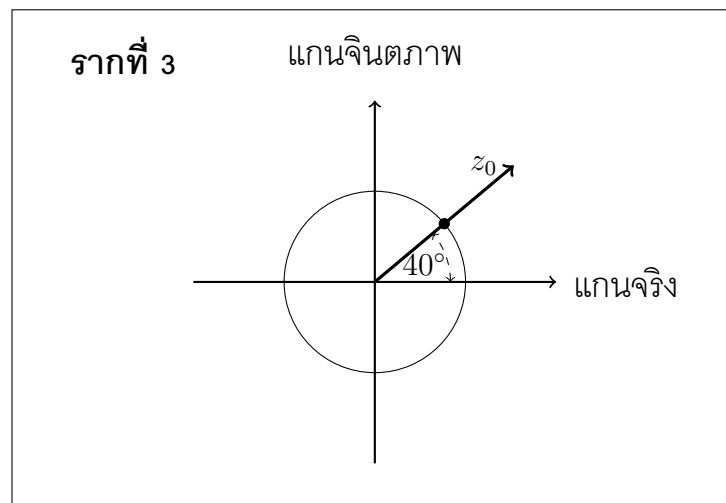
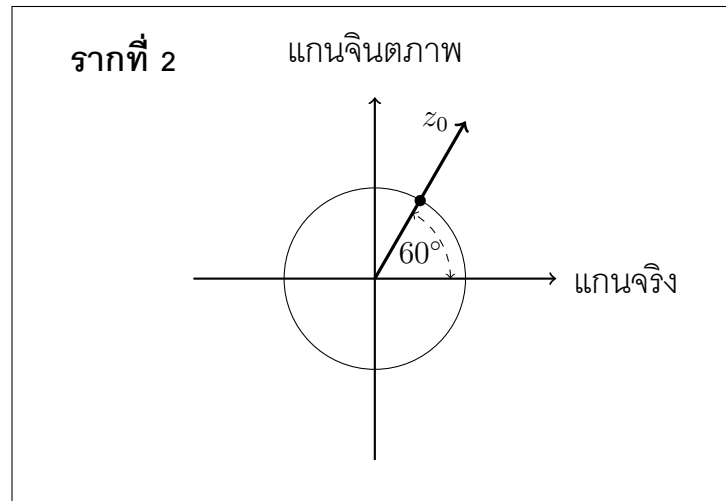
นำเข้าสู่บทเรียนโดยทบทวนนิยามของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ที่กล่าวไว้ว่า w เป็นรากที่ n ของ

จำนวนเชิงซ้อน z ก็ต่อเมื่อ $w^n = z$ และตั้งคำถามสำหรับจำนวนง่าย ๆ เช่น รากที่ 2 ของ 1 คือ 1 และ -1 และเขียนตัวอย่างรากที่ 2 รากที่ 3 และรากที่ 4 ของ 1 โดยระบุตำแหน่งลงบนวงกลมหนึ่งหน่วย ให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของมุม



2. ขั้นสำรวจค้นหา

แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละ 2 คน กิจกรรมที่ 1 แจกบัตรคำถามกลุ่มที่ละใบเริ่มจากรากที่ 2 รากที่ 3 รากที่ 4 รากที่ 5 และรากที่ 6 ตามลำดับ โดยบัตรคำถามระบุรากที่ n และให้รากจำนวนเชิงซ้อนมา 1 จำนวนและเขียนกราฟไว้ใน ให้นักเรียนเขียนรากที่เหลือบนวงกลมหนึ่งหน่วย ใช้เวลา 10 นาที ตัวอย่างบัตรคำถาม



กิจกรรมที่ 2 ใช้เวลา 15 นาที แจกบัตรคำถามการหารากโดยใช้กฎของเดอว์มัวร์ คำถามเช่น

1. จงหารากที่ 2 ของ i
2. จงหารากที่ 3 ของ $-8i$
3. จงหารากที่ 6 ของ -64

พร้อมทั้งวาดรากของจำนวนเชิงซ้อนเหล่านั้นลงบนกราฟวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีผู้สอนคอยให้คำแนะนำ

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

ให้แต่ละกลุ่มข้อสรุปคำตอบ และออกมาอภิปรายคำตอบที่ได้ แล้วนักเรียนในชั้นสรุปความคิดรวบยอด สรุปขั้นตอนการหารากที่ n ของ z ได้ดังนี้

1. เขียน z ในรูปเชิงขั้ว นั่นคือ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
2. หารากที่ n ตัวแรกจาก $z_0 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$

3. หารากที่เหลือโดยวัดระยะห่างของมุมเป็น $\frac{2\pi}{n}$ จนวนวงกลม

4. เปลี่ยนค่าเหล่านั้นในรูป $x + yi$

4. ขันขยายความรู้

ครูแสดงโจทย์ในกรณีทีรูปแบบเชิงขั้วในมุมทั่วไปเช่น $z = 3 + 4i$ หรือ $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ เป็นต้น โดยการขยายแนวคิดดังกล่าวเพื่อหาคำตอบที่กำหนด

5. ขันประเมิน

ให้นักเรียนทำใบงานรายบุคคล

สรุป

กล่าวถึงที่มาของจำนวนเชิงซ้อนโดยนิยามจำนวนจินตภาพหนึ่งหน่วยคือ $i = \sqrt{-1}$ จำนวนเชิงซ้อนจะเขียนในรูป $a + bi$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง สำหรับการดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อนนิยามคล้ายคลึงกับสมบัติจำนวนจริง ทำให้ได้สมบัติต่าง ๆ เช่นเดียวกับสัจพจน์สนามของจำนวนจริง และต่อมาจะกล่าวถึงมอดุลัสและสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{และ} \quad \overline{a + bi} = a - bi$$

จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนในระบบพิกัดฉากโดยเรียกแกน X ว่าแกนจริง และแกน Y ว่าแกนจินตภาพ โดยเปลี่ยนจาก $x + yi$ เป็นคู่อันดับ (x, y) ถัดไปกล่าวถึงการเปลี่ยนระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว ทำให้ได้สมบัติที่สำคัญเช่น

$$1. (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

$$2. (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

เพื่อใช้ในการคำนวณค่าที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น และสุดท้ายนำไปใช้ในการหาคำรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z ตามกฎของเดอมัวร์

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad \text{เมื่อ} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

สุดท้ายเป็นการนำเสนอตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องการหารากของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

คำถามท้ายบท

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$

1.1 $(4 - 3i) + (6 + i)$

1.4 $(2 + i)^2 + (3 - 5i)$

1.2 $(4 + 7i) - i(1 - i)$

1.5 $\frac{3 + i}{4 - 3i}$

1.3 $(1 + i)^4 + (1 - i)^4$

1.6 $\frac{1 + 2i}{1 - 2i} + \frac{2 - i}{2 + i}$

2. จงหาจำนวนจริง x และ y ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

2.1 $(x + 3i) + 5 + yi + xi = 6 + 2i$

2.3 $(x - 2yi)(1 + i)^2 = 3 - 6i$

2.2 $(y + xi) - (x - 2i) = 8 + i$

2.4 $(x + yi)(1 + i) = 2 - 3i$

3. จงหาจำนวนจริง a และ b ที่สอดคล้องสมการ

$(1 + ai)^3 = -107 + bi$

4. จงหาจำนวนจริง x และ y ที่สอดคล้องสมการ

$\frac{5 - 2i}{x + yi} = \frac{10}{i(1 + i)(2 + i)(3 + i)(4 + i)}$

5. กำหนดให้ $z_0 = 0$ และ $z_{n+1} = z_n^2 + i$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ จงหา $n(\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\})$

6. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง กำหนดให้ $z = a + bi$ และ $w = c + di$ นิยาม $z * w = ac + bdi$ จงตรวจสอบว่า

6.1 $\mathbb{C}$ มีสมบัติปิดภายใต้ $*$

6.4 $\mathbb{C}$ มีสมบัติการมีเอกลักษณ์ภายใต้ $*$

6.2 $\mathbb{C}$ มีสมบัติสลับที่ภายใต้ $*$

6.5 $\mathbb{C} - \{0\}$ มีสมบัติการมีตัวผกผันภายใต้ $*$

6.3 $\mathbb{C}$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มภายใต้ $*$

6.6 จงหาตัวผกผันของ $2 + i$ ภายใต้ $*$

7. จงหามอดุลัสและสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

7.1 $7 - 24i$

7.3 $(3 + 4i)^2$

7.5 $\frac{11 - i}{1 - 2i}$

7.2 $(1 - 2i) - i(2 - 3i)$

7.4 $(2 - i) - (1 - 5i)$

7.6 $\frac{i - 5}{i^3 - 7}$

8. จงหารากคำตอบสมการต่อไปนี้

8.1 $|z| + z = 2 + i$

8.2 $z^2 - z + i\bar{z} = 0$

9. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งทำให้ z เป็นรากของสมการ $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ มีขนาด $|z| = 1$ จงแสดงว่าราก w ของสมการ $w^3 + |a|w^2 + |b|w + |c| = 0$ มีขนาด $|w| = 1$

10. ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า

$$10.1 \quad |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

$$10.2 \quad |z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

11. ให้ z, w และ u เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า

$$11.1 \quad |z - w| \leq |z - u| + |u - w|$$

$$11.2 \quad |z - w| \geq ||z| - |w||$$

$$11.3 \quad |z + w| \geq ||z| - |w||$$

$$11.4 \quad \left| \frac{u}{z+w} \right| \leq \frac{|u|}{||z| - |w||} \quad \text{เมื่อ } |z| \neq |w|$$

12. จงเขียนกราฟแสดงเซตต่อไปนี้

$$12.1 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$12.2 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$$

$$12.3 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$$

$$12.4 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 4\}$$

$$12.5 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z - 1| = 4\}$$

$$12.6 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| + |z - i| = 6\}$$

$$12.7 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid ||z + 2i| - |z - 2i|| = 10\}$$

$$12.8 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid ||z - 1 + i| - |z + 3 + i|| = 8\}$$

$$12.9 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid i(\bar{z} - z) = (z + \bar{z})^2\}$$

$$12.10 \quad \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leq 9\}$$

13. จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปสมการจำนวนเชิงซ้อน z เมื่อ $z = x + yi$

$$13.1 \quad x^2 + y^2 = 9$$

$$13.2 \quad x^2 - y^2 = 16$$

$$13.3 \quad 16x^2 + 9y^2 = 144$$

$$13.4 \quad x = y^2$$

$$13.5 \quad xy = x + y$$

$$13.6 \quad |x| + |y| = 1$$

14. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า สามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดยอด z_1, z_2, z_3 ในระนาบเชิงซ้อนเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ก็ต่อเมื่อ $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$

15. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ และ $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ จงแสดงว่า สามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดยอด z_1, z_2, z_3 ในระนาบเชิงซ้อนเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

16. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทั้งหมดและ

$$z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2 = z_1^2 + z_1z_3 + z_3^2 = z_3^2 + z_3z_2 + z_2^2 = 0$$

$$\text{จงหาค่าของ } \frac{z_1 + z_2}{z_3} + \frac{z_1 + z_3}{z_2} + \frac{z_2 + z_3}{z_1}$$

17. กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $\frac{z_1}{z_2}$ ไม่เป็นจำนวนจริง และ

$$z_1 \log |z_1| + z_2 \log |z_2| = (z_1 + z_2) \log |z_1 + z_2|$$

จงหาค่าของ $\frac{z_1}{z_2}$

18. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปแบบเชิงขั้วโดย $r = |z|$ และ $\theta = \text{Arg}(z)$

18.1 $z = 2$

18.3 $z = -1 + i$

18.5 $z = 2i$

18.7 $z = -\sqrt{3} + i$

18.2 $z = -3$

18.4 $z = 5i$

18.6 $z = -4 - 4i$

18.8 $z = 1 - \sqrt{3}i$

19. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $x + yi$

19.1 $z = 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

19.4 $z = 5 \left(\cos \frac{13\pi}{3} + i \sin \frac{13\pi}{3} \right)$

19.2 $z = 10 \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right)$

19.5 $z = 6e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

19.3 $z = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

19.6 $z = \pi e^{i\frac{2\pi}{3}}$

20. จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

20.1 $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{10}$

20.3 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{-10}$

20.2 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{252}$

20.4 $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^8 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^8$

21. จงหารากที่ต่อไปนี

21.1 รากที่ 2 ของ -4

21.3 รากที่ 3 ของ -1

21.5 รากที่ 6 ของ -64

21.2 รากที่ 2 ของ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

21.4 รากที่ 3 ของ 27

21.6 รากที่ 6 ของ $64i$

22. กำหนดให้ $z = \cos \frac{5\pi}{14} + i \sin \frac{9\pi}{14}$ จงหาค่าของ $\left(\frac{1-\bar{z}}{1+z} \right)^7$

23. กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันและ $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0$ จงหา

23.1 อาร์กิวเมนต์ของ $\frac{z_1}{z_2}$

23.2 ถ้า $A = (1 + \frac{z_1}{z_2}) + (1 + \frac{z_1}{z_2})^2 + \dots + (1 + \frac{z_1}{z_2})^{2559}$ และ $B = (1 + \frac{z_2}{z_1}) + (1 + \frac{z_2}{z_1})^2 + \dots + (1 + \frac{z_2}{z_1})^{2559}$
จงหาค่าของ $A + B$

เอกสารอ้างอิง

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ณัฐพันธ์ กิตติสิน. (2550). **การวิเคราะห์จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย

Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014)
Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended).
Marleston, Australia : Haese& Harris Publications

Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. Quercus Editions Ltd, London, England

บรรณานุกรม

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2539). **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: กรมวิชาการ
- คณะผู้เขียนวิชาคณิตศาสตร์. (2550). **ทฤษฎีจำนวน**. กรุงเทพฯ: มูลนิธิ สอวน.
- ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์. (2547). **ตรรกะแห่งการพิสูจน์**. กรุงเทพฯ: บริษัทสำนักพิมพ์ท็อปจำกัด
- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
- ณัฐพันธ์ กิตติสิน. (2550). **การวิเคราะห์จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ชวลิต บุรพาศิริวัฒน์. (2538). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏจันทรเกษม
- ชะเอม สายทอง. (2530). **ทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์
- ทีศนา แหมมณี. (2560). **ศาสตร์การสอน**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- พอล ฮอฟแมน. (2547). **ผู้ชายที่หลงรักตัวเลข**. แปลและเรียบเรียงโดย นรา สุภักโรจน์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มติชน
- มานะ เอกจริยวงศ์. (2542). **ทฤษฎีเซต**. ลพบุรี: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ สถาบันราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2558). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: วี.พริ้นท์(1991)
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2560). **วิธีการพิสูจน์**. กรุงเทพฯ: มูลนิธิ สอวน.
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ภัทรา เตชาภิวาทย์. (2540). **คณิตตรรกศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
- สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. (2559). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา**. กรุงเทพฯ: สหมิตรพริ้นติ้ง แอนด์พับลิชชิ่ง จำกัด
- อัมพร ม้าคนอง. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อัมพร ม้าคนอง. (2559). **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ.**
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **ตรรกศาสตร์และ
ระบบจำนวนจริง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์
และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น.**
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

อัจฉรา หาญชูวงศ์. (2542). **ทฤษฎีจำนวน.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Arthur Benjamin. (2015). **Magic of math.** New York: Hachette book group, Inc.

Brian Clegg. (2003). **A brief history of infinity.** UK: CPI group (UK) Ltd

David Eugene Smith. (1958). **History of mathematics.** New York: Dover Publications,
Inc.

David S. Dummit and Richard M. Foote. (2004). **Abstract Algebra.** Hoboken, NJ:
John Wiley & Sons, Inc.

F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. (2003). **Sets for Mathematics.** UK: Cambridge
university press

Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014)
Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended).
Marleston, Australia : Haese& Harris Publications

Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes.** London, England: Quercus Editions Ltd

Tom Jackson. (2012). **Mathematics an illustrated history of numbers.** New York:
Shelter Harbor Press and Worth Press Ltd