



เอกสารประกอบการสอน  
รายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป

สำคัญ ฮ่อบรรทัด

คณะวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์  
2558





เอกสารประกอบการสอน  
รายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป

สำคัญ ฮ่อบรรทัด  
วท.ม.(คณิตศาสตร์)

คณะวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์  
2558



## คำนำ

เอกสารประกอบการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป รหัส 4091108 นี้ ถูกกำหนดให้มีขึ้นในหลักสูตรคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ เป็นรายวิชาพื้นฐานหลากหลายหลักสูตรในระดับปริญญาตรีที่ปรับปรุงขึ้นใหม่ เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพการศึกษาที่เปลี่ยนไป รวมถึงความซับซ้อนในรายวิชาของแต่ละหลักสูตร และสามารถพัฒนาศักยภาพของนักศึกษาเรียนรู้รายวิชาขั้นสูงต่อไป

จุดมุ่งหมายของรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไปมุ่งเน้นให้นักศึกษาเรียนรู้หลักการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน ไม่ว่าจะเป็น เซต ตรรกศาสตร์ ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เมตริกซ์ ระบบเลขฐาน หรือแม้แต่กำหนดการเชิงเส้น โดยมีวัตถุประสงค์ให้นักศึกษาสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้ สามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้จะอำนวยความสะดวกให้กับผู้ที่สนใจและผู้ที่ไม่รู้ในวิชาคณิตศาสตร์ ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวที่เป็นกำลังใจทำให้มาถึงตรงจุดนี้ ครูอาจารย์ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้แก่ข้าพเจ้า เอกสารและตำราที่ข้าพเจ้าได้ศึกษารวมถึงอ้างอิงจนเกิดเอกสารเล่มนี้ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ที่ให้โอกาสดีๆ อนึ่งหากเอกสารประกอบการสอนมีข้อผิดพลาดประการใดก็ขออภัยไว้ ณ โอกาสนี้

สำคัญ อ้อบรรทัด

มีนาคม 2558



## สารบัญ

|                                              | หน้า |
|----------------------------------------------|------|
| คำนำ . . . . .                               | (1)  |
| สารบัญ . . . . .                             | (3)  |
| สารบัญรูปภาพ . . . . .                       | (6)  |
| สารบัญตาราง . . . . .                        | (7)  |
| แผนบริหารการสอน . . . . .                    | (9)  |
| แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1 . . . . .        | 1    |
| บทที่ 1 เซต . . . . .                        | 3    |
| 1.1 การเขียนเซต . . . . .                    | 3    |
| 1.2 ชนิดของเซต . . . . .                     | 5    |
| 1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต . . . . .         | 6    |
| 1.4 การดำเนินการระหว่างเซต . . . . .         | 12   |
| 1.5 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด . . . . .         | 20   |
| แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                    | 25   |
| แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2 . . . . .        | 31   |
| บทที่ 2 ตรรกศาสตร์ . . . . .                 | 33   |
| 2.1 ประพจน์ . . . . .                        | 33   |
| 2.2 ตัวเชื่อมประพจน์ . . . . .               | 33   |
| 2.3 ตารางค่าความจริง . . . . .               | 39   |
| 2.4 การสมมูล . . . . .                       | 43   |
| 2.5 การอ้างเหตุผล . . . . .                  | 47   |
| 2.6 ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ . . . . .      | 55   |
| 2.7 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย . . . . . | 59   |
| แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                    | 62   |

## สารบัญ (ต่อ)

|                                                                    | หน้า |
|--------------------------------------------------------------------|------|
| แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3 . . . . .                              | 65   |
| บทที่ 3 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน . . . . .                          | 67   |
| 3.1 ความสัมพันธ์ . . . . .                                         | 67   |
| 3.2 ฟังก์ชัน . . . . .                                             | 71   |
| 3.3 ฟังก์ชันชนิดต่างๆ . . . . .                                    | 73   |
| 3.4 ลักษณะของฟังก์ชัน . . . . .                                    | 76   |
| 3.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน . . . . .                              | 79   |
| แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                          | 84   |
| แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4 . . . . .                              | 88   |
| บทที่ 4 เมทริกซ์ . . . . .                                         | 90   |
| 4.1 ความหมายและความรู้เบื้องต้นของเมทริกซ์ . . . . .               | 90   |
| 4.2 การดำเนินการของเมทริกซ์ . . . . .                              | 93   |
| 4.3 ทรานสโพสของเมทริกซ์ . . . . .                                  | 99   |
| 4.4 ดีเทอร์มิแนนต์ . . . . .                                       | 101  |
| 4.5 อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ . . . . .                           | 106  |
| แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                          | 115  |
| แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5 . . . . .                              | 119  |
| บทที่ 5 จำนวนจริง . . . . .                                        | 121  |
| 5.1 สมบัติของจำนวนจริง . . . . .                                   | 122  |
| 5.2 สมบัติความบริบูรณ์หรือสัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด . . . . . | 125  |
| 5.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ และตัวประกอบ . . . . .                         | 126  |
| 5.4 การไม่เท่ากันของจำนวนจริงและอสมการ . . . . .                   | 129  |
| 5.5 ค่าสัมบูรณ์ . . . . .                                          | 135  |
| แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                          | 137  |

## สารบัญ (ต่อ)

|                                                         | หน้า |
|---------------------------------------------------------|------|
| แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6 . . . . .                   | 139  |
| บทที่ 6 ระบบเลขฐาน . . . . .                            | 140  |
| 6.1 จำนวนในระบบโรมัน . . . . .                          | 140  |
| 6.2 ระบบตัวเลขมีหลัก . . . . .                          | 142  |
| 6.3 การแปลงเลขฐานต่างๆ . . . . .                        | 144  |
| 6.4 การดำเนินการของตัวเลขฐานต่างๆ . . . . .             | 152  |
| แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                               | 160  |
| แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7 . . . . .                   | 164  |
| บทที่ 7 กำหนดการเชิงเส้น . . . . .                      | 166  |
| 7.1 ตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น . . . . .                 | 166  |
| 7.2 การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้น . . . . .              | 170  |
| 7.3 ระบบสมการ . . . . .                                 | 173  |
| 7.4 การเขียนกราฟอสมการเชิงเส้น . . . . .                | 175  |
| 7.5 ระบบอสมการ . . . . .                                | 177  |
| 7.6 การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ . . . . . | 179  |
| แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                               | 182  |
| บรรณานุกรม . . . . .                                    | 185  |

## สารบัญรูปภาพ

| รูปที่                                                            | หน้า |
|-------------------------------------------------------------------|------|
| 1.1 แสดงการเขียนเซตด้วยแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ . . . . .           | 5    |
| 1.2 แสดงบริเวณแรเงาแสดง $A \cup B$ ในรูปแบบต่างๆ . . . . .        | 12   |
| 1.3 แสดงบริเวณแรเงาแสดง $A \cap B$ ในรูปแบบต่างๆ . . . . .        | 12   |
| 1.4 แสดงบริเวณแรเงาแสดง $A'$ . . . . .                            | 13   |
| 1.5 แสดงบริเวณแรเงาแสดง $A - B$ ในรูปแบบต่างๆ . . . . .           | 14   |
| 2.1 แสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยด้วยแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ . . . . . | 60   |
| 3.1 แสดงตัวอย่างกราฟเชิงเส้น . . . . .                            | 74   |
| 3.2 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันคงตัว . . . . .                    | 74   |
| 3.3 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง . . . . .                 | 75   |
| 3.4 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล . . . . .          | 75   |
| 3.5 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ . . . . .              | 76   |
| 5.1 แสดงแผนผังการสร้างจำนวนจริงจากจำนวนต่างๆ . . . . .            | 121  |
| 7.1 แสดงบริเวณคำตอบส่วนที่ $I$ รวมขอบ . . . . .                   | 175  |
| 7.2 แสดงบริเวณคำตอบส่วนที่ $I$ ไม่รวมขอบ . . . . .                | 175  |

## สารบัญตาราง

| ตารางที่                                            | หน้า |
|-----------------------------------------------------|------|
| 6.1 แสดงสัญลักษณ์ของเลขโรมันแบบต่างๆ . . . . .      | 142  |
| 6.2 แสดงระบบเลขฐานที่นิยมใช้ในระบบดิจิทัล . . . . . | 143  |





## แผนบริหารการสอนวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป

ชื่อสถาบันอุดมศึกษา : มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

คณะ/สาขาวิชา : คณะวิทยาศาสตร์/สาขาวิชาคณิตศาสตร์

### หมวดที่ 1 ข้อมูลทั่วไป

1. รหัสและชื่อรายวิชา

4091108 คณิตศาสตร์ทั่วไป

2. จำนวนหน่วยกิต

3(3-0-6)

3. หลักสูตร

ชื่อหลักสูตรที่ใช้รายวิชานี้ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิทยาศาสตร์บัณฑิต

ประเภทของรายวิชา วิชาแกน

4. อาจารย์ผู้สอน

อาจารย์ สำคัญ ฮ่อบรรทัด

5. ภาคการศึกษา/ชั้นปีที่เรียน

ภาคการศึกษาที่ 1/นักศึกษาชั้นปีที่ 1

6. รายวิชาที่ต้องเรียนมาก่อน (Pre – requisite)

-

7. รายวิชาที่ต้องเรียนพร้อมกัน (Co – requisite)

-

8. สถานที่เรียน

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

9. วันที่จัดทำหรือปรับปรุงรายละเอียดของรายวิชาครั้งล่าสุด

15 ธันวาคม 2557

## หมวดที่ 2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1. จุดมุ่งหมายรายวิชา

เพื่อให้ นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาตรรกศาสตร์เบื้องต้น เซตเบื้องต้น ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ ระบบจำนวน ระบบเลขฐานต่าง ๆ และสามารถนำความรู้ในรายวิชาไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้อย่างเหมาะสม

2. วัตถุประสงค์ในการพัฒนา/ปรับปรุงรายวิชา

เพื่อพัฒนาการเรียนการสอนและความรู้ให้ทันกับยุคสมัย

## หมวดที่ 3 ลักษณะและการดำเนินการ

1. คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาพื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้น เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เมทริกซ์ และ ดีเทอร์มิแนนต์ ระบบจำนวน ระบบเลขฐานต่าง ๆ

2. จำนวนชั่วโมงที่ใช้ต่อภาคการศึกษา

| บรรยาย     | สอนเสริม | การฝึกปฏิบัติ/งานภาคสนาม | การศึกษาด้วยตนเอง |
|------------|----------|--------------------------|-------------------|
| 40 ชั่วโมง | -        | 5 ชั่วโมง                | 30 ชั่วโมง        |

3. จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่อาจารย์ให้คำปรึกษาและ แนะนำทางวิชาการแก่นักศึกษาเป็นรายบุคคล

3 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

## หมวดที่ 4 การพัฒนาการเรียนรู้ของนักศึกษา

### 1. คุณธรรม จริยธรรม

#### 1.1 คุณธรรม จริยธรรมที่ต้องพัฒนา

- ตระหนักในคุณค่าและคุณธรรม จริยธรรม เสียสละ และซื่อสัตย์สุจริต
- มีวินัย ตรงต่อเวลา และมีความรับผิดชอบต่อตนเองและสังคม
- มีภาวะความเป็นผู้นำและผู้ตาม สามารถทำงานเป็นทีมและแก้ไขปัญหาความขัดแย้งรวมถึงลำดับความสำคัญของปัญหาได้
- เคารพสิทธิและรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น รวมทั้งเคารพในคุณค่าและศักดิ์ศรีของความเป็นมนุษย์
- เคารพกฎระเบียบและข้อบังคับต่างๆ ขององค์กรและสังคม
- มีจรรยาบรรณทางวิชาการและวิชาชีพ

#### 1.2 วิธีการสอน

- บรรยายพร้อมยกตัวอย่าง กรณีศึกษาในประเด็นที่เกี่ยวข้อง
- อภิปรายกลุ่ม

#### 1.3 วิธีการประเมินผล

- ประเมินผลพฤติกรรมการเข้าห้องเรียน
- ประเมินผลการร่วมกิจกรรมในชั้นเรียน
- ประเมินผลการทำงานที่ได้รับมอบหมายตามเวลา
- ประเมินผลการวิเคราะห์กรณีศึกษา

### 2. ความรู้

#### 2.1 ความรู้ที่ต้องได้รับ

มีความรู้ในเรื่องตรรกศาสตร์เบื้องต้น เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์ ระบบจำนวน ระบบเลขฐานต่าง ๆ และสามารถนำความรู้ในรายวิชาไปประยุกต์ในการแก้โจทย์ปัญหาในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้อย่างเหมาะสม นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานในการศึกษารายวิชาทางคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไป

#### 2.2 วิธีการสอน

- ศึกษาเอกสารประกอบการสอน

- บรรยาย ผู้สอนบรรยายแนวคิด ทฤษฎีเพื่อสร้างพื้นฐานความรู้
- ศึกษาค้นคว้าจากแหล่งต่างๆ
- วิเคราะห์กรณีศึกษา
- ศึกษาโดยใช้ปัญหา
- ทดลองปฏิบัติ
- แก้โจทย์ปัญหา
- รวบรวมข้อมูล
- สัมภาษณ์บุคคล
- สันทนาซักถาม
- ศึกษาใบความรู้และปฏิบัติกิจกรรมตามใบงาน
- สร้างชิ้นงานตามหลักการหรือโจทย์ปัญหา
- บันทึกการเรียนรู้

### 2.3 วิธีการประเมินผล

- ประเมินผลชิ้นงาน
- ประเมินพฤติกรรมการเรียนแต่ละกิจกรรม
- ประเมินการนำเสนอความรู้ประกอบการใช้สื่อต่างๆ
- ทดสอบย่อย
- สอบกลางภาค
- สอบปลายภาค

## 3 ทักษะทางปัญญา

### 3.1 ทักษะทางปัญญาที่ต้องพัฒนา

พัฒนาความสามารถในการคิดอย่างเป็นระบบ มีการวิเคราะห์ เพื่อการป้องกัน และแก้ไขปัญหาอย่างสร้างสรรค์ คิดกระบวนการแก้ปัญหาตามหลักการทางคณิตศาสตร์ ที่ถูกต้อง ฯลฯ

### 3.2 วิธีการสอน

- ให้นักศึกษาวางแผนปฏิบัติกิจกรรมต่างๆ ในรายวิชา
- ทำแผนที่ความคิด (Mind Mapping)
- อภิปรายกลุ่ม

- วิเคราะห์กรณีศึกษา

### 3.3 วิธีการประเมินผล

- ประเมินผลจากชิ้นงาน
- ประเมินผลจากกรณีศึกษา
- สอบกลางภาคและปลายภาค โดยข้อสอบที่เน้นการใช้สถานการณ์ที่ให้อวิเคราะห์

## 4 ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ

### 4.1 ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบที่ต้องพัฒนา

- การสร้างสัมพันธ์ภาพระหว่างผู้เรียนด้วยกัน
- ความเป็นผู้นำและผู้ตามในการทำงานเป็นทีม
- การพึ่งตนเองโดยการเรียนรู้ด้วยตนเอง และมีความรับผิดชอบงานที่ได้รับมอบหมายให้ครบถ้วนตามกำหนดเวลา

### 4.2 วิธีการสอน

- การทำงานเป็นกลุ่ม การปฏิบัติหน้าที่และความรับผิดชอบในกลุ่ม
- การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ และแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างกลุ่ม
- การปฏิบัติงานเป็นรายบุคคล
- การนำเสนอผลงาน

### 4.3 วิธีการประเมินผล โดยข้อสอบที่เน้นการใช้สถานการณ์ให้อวิเคราะห์

- ประเมินผลพฤติกรรมการทำงานเป็นกลุ่ม

## 5 ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ

### 5.1 ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสารและการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศที่ต้องพัฒนา

- การคิดคำนวณเชิงตัวเลข
- การสื่อสารทั้งการพูด การฟัง การแปล และการเขียน โดยการทำรายงานรวมถึงนำเสนอในชั้นเรียน
- การวิเคราะห์ข้อมูลจากกรณีศึกษา
- การสืบค้นข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต
- การใช้เทคโนโลยีสารสนเทศในการสื่อสาร เช่น การส่งงานทางอีเมล
- การนำเสนอรายงานโดยใช้รูปแบบ เครื่องมือ และเทคโนโลยีที่เหมาะสม

## 5.2 วิธีการสอน

- การศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองจากแหล่งเรียนรู้ออนไลน์และสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- การนำเสนอผลงานด้วยวาจาประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
- การนำเสนอผลการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองจากการวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลเชิงตัวเลข มีสถิติอ้างอิงจากแหล่งข้อมูลที่เชื่อถือ

## 5.3 วิธีการประเมินผล

- ประเมินผลจากการส่งข้อมูล ชิ้นงาน

## หมวดที่ 5 แผนการสอนและการประเมินผลการเรียนรู้

## 1. แผนการสอน

[illegible]

## 2. แผนประเมินผลการเรียนรู้

| ลำดับที่ | วิธีการประเมิน                  | สัปดาห์ที่ประเมิน | สัดส่วนของการประเมิน |
|----------|---------------------------------|-------------------|----------------------|
| 1        | การทดสอบย่อยครั้งที่ 1          | 4                 | ร้อยละ 5             |
|          | การสอบกลางภาค                   | 8                 | ร้อยละ 30            |
|          | การทดสอบย่อยครั้งที่ 2          | 12                | ร้อยละ 5             |
|          | การสอบปลายภาค                   | วันสอบปลายภาค     | ร้อยละ 40            |
| 2        | ประเมินผลชิ้นงาน                | ตลอดภาคการศึกษา   | ร้อยละ 15            |
|          | ประเมินผลพฤติกรรม               |                   |                      |
|          | ประเมินการนำเสนอผลงาน           |                   |                      |
|          | ประเมินการมีส่วนร่วมในชั้นเรียน |                   |                      |
| 3        | การเข้าเรียน                    | ตลอดภาคการศึกษา   | ร้อยละ 5             |

## หมวดที่ 6 ทรัพยากรการเรียนการสอน

### 1. เอกสารและตำราหลัก

- คณิตศาสตร์เบื้องต้น คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง
- หลักการคณิตศาสตร์ อาจารย์ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- คณิตศาสตร์พื้นฐาน คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

### 2. เอกสาร แหล่งเรียนรู้และข้อมูลแนะนำ

- ห้องสมุดมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

## หมวดที่ 7 การประเมินผลและปรับปรุงการดำเนินการของรายวิชา

### 1. กลยุทธ์การประเมินประสิทธิผลของรายวิชาโดยนักศึกษา

- การสนทนากลุ่มระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
- การสังเกตพฤติกรรมของผู้เรียน
- แบบประเมินผู้สอน

### 2. กลยุทธ์การประเมินการสอน

- วิเคราะห์ผลจากสัมฤทธิ์ของการเรียน
- วิเคราะห์จากบันทึกการเรียนรายสัปดาห์



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

### เนื้อหาประจำบท

1. การเขียนเซต
2. ชนิดของเซต
3. ความสัมพันธ์ระหว่างเซต
4. การดำเนินการระหว่างเซต
5. จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. บอกความหมายของเซตและหาสมาชิกของเซตได้
2. เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกของเซตได้
3. เมื่อกำหนดเซตใดๆ ให้สามารถบอกได้ว่าเซตใดเป็นเซตว่าง เซตจำกัด เซตอนันต์ และเซตที่เท่ากันได้
4. เขียนสับเซตของเซตที่กำหนดให้ได้
5. เขียนเพาเวอร์เซตและบอกจำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของเซตที่กำหนดให้ได้
6. บอกความหมายของเอกภาพสัมพัทธ์ได้
7. เขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์แสดงความสัมพันธ์ของเซตในกรณีต่างๆ ได้
8. หาเซตที่เกิดจากการยูเนียนกันระหว่างเซตที่กำหนดให้ตั้งแต่ 2 เซตขึ้นไปได้
9. หาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชันระหว่างเซตที่กำหนดให้ตั้งแต่ 2 เซตขึ้นไปได้
10. หาคอมพลีเมนต์ของเซตที่กำหนดให้ได้
11. หาผลต่างของเซตที่กำหนดให้ได้
12. หาจำนวนสมาชิกเซตจำกัดที่กำหนดให้ได้
13. นำความรู้เรื่องจำนวนสมาชิกของเซตจำกัดไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

### วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
  - 1.1 การเขียนเซต
  - 1.2 ชนิดของเซต
  - 1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต
  - 1.4 การดำเนินการระหว่างเซต
  - 1.5 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

- 2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์ เช่น อินเทอร์เน็ตเรื่องวิธีการเขียนเซต
- 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

### สื่อการเรียนการสอน

- 1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ
- 2. Slide Presentation

### การวัดผลและการประเมินผล

- 1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึกความรู้และการซักถาม
- 2. แบบทดสอบ
- 3. ใบงาน
- 4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

# บทที่ 1

## เซต

เซต (set) เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มีมานานแล้วหลายร้อยปี เพื่อใช้อธิบายคณิตศาสตร์แขนงอื่นให้มีความรัดกุม กระชับ และมีเหตุผลที่ชัดเจนมากขึ้น ในช่วงแรกนั้นความรู้เรื่องเซตไม่ค่อยเป็นระบบและไม่มีการเขียนทฤษฎีที่ชัดเจน จนมาถึงช่วงปลายทศวรรษที่ 19 นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ คันทอร์ เกอร์จ (Cantor, Georg : 1845-1918) ได้จัดเนื้อหาเรื่องเซตให้เป็นระบบและเขียนทฤษฎีที่ชัดเจน อย่างที่เห็นในปัจจุบัน

เซตเป็นคำทางคณิตศาสตร์ที่ไม่มีคำนิยาม (undefined) แต่ใช้แทนกลุ่มของสิ่งต่างๆ เช่น นัก 1 ผูก ข้าง 1 โขลง นักฟุตบอล 1 ทีม เป็นต้น แต่ในทางคณิตศาสตร์นั้นจะแทนด้วย นัก 1 เซต ข้าง 1 เซต นักฟุตบอล 1 เซต เป็นต้น เซตจะไม่ใช้กับสิ่งของที่บอกคุณภาพ เช่น เซตของคนสวย เซตของคนดี เรานิยมใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น  $A, B, C, \dots$  แทนชื่อเซต เรียกสิ่งที่อยู่ภายในเซตว่าสมาชิกของเซต ใช้สัญลักษณ์  $\in$  หมายถึง การเป็นสมาชิก และ  $\notin$  หมายถึง การไม่เป็นสมาชิก เช่น  $a \in B$  หมายถึง  $a$  เป็นสมาชิกในเซต  $B$  และ  $b \notin C$  หมายถึง  $b$  ไม่ได้เป็นสมาชิกในเซต  $C$  เป็นต้น

### 1.1 การเขียนเซต

การเขียนเซตนั้นมีความสำคัญมาก หากเลือกเขียนเซตในรูปแบบที่ผู้เขียนต้องการสื่อสารสามารถทำให้ผู้รับเข้าใจได้ง่ายขึ้น โดยเฉพาะถ้าต้องการนำไปศึกษาเชิงลึก จำเป็นต้องมีวิธีการเขียนเซตในรูปแบบที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ต่อไป ในบทนี้ผู้เขียนแบ่งการเขียนเซตออกเป็น 3 รูปแบบใหญ่ๆ คือ

#### 1.1.1 การเขียนแบบแจกแจงสมาชิก (set tabular form)

การเขียนแบบแจกแจงสมาชิกทำให้สามารถมองเห็นชัดเจนว่าภายในเซตๆ นั้นประกอบด้วยสมาชิกตัวใดบ้าง ตัวอย่างเช่น  $A$  เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก สามารถเขียน  $A$  ในรูปแบบแจกแจงสมาชิก คือ  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  เป็นต้น

**ตัวอย่างที่ 1.1** จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1. เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10
2. เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วย ข
3. เซตของจังหวัดที่มีชายแดนติดประเทศมาเลเซีย

4. เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีหนึ่งหลัก
5. เซตของจำนวนคู่บวกที่ไม่เกิน 20
6. เซตของจำนวนนับที่สอดคล้องกับสมการ  $x^2 - 4x + 4 = 0$

วิธีทำ พิจารณาแต่ละข้อสามารถเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

1. เซตของจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10  $= \{1, 3, 5, 7, 9\}$
2. เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วย ข  $= \{\text{ขอนแก่น}\}$
3. เซตของจังหวัดที่มีชายแดนติดประเทศมาเลเซีย  $= \{\text{ยะลา, สงขลา, สตูล, นราธิวาส}\}$
4. เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีหนึ่งหลัก  $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
5. เซตของจำนวนคู่บวกที่ไม่เกิน 20  $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
6. เซตของคำตอบของ  $x^2 - 4x + 4 = 0$   $= \{2\}$

### 1.1.2 การเขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก (set builder form)

การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขมีไว้สำหรับเขียนในกรณีที่มีจำนวนสมาชิกหลายจำนวน และมีคุณสมบัติบางอย่างเฉพาะเจาะจง ตัวอย่างเช่น เซต  $A$  เป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 1 และ 2 ซึ่งสามารถเขียนแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$$

นอกจากนี้ยังสามารถเขียนเซตคำตอบของสมการได้อีกด้วย เช่น

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขสมาชิก

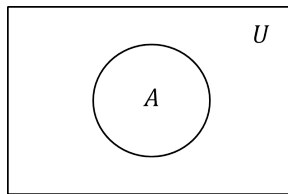
1.  $\{1, 2\}$
2.  $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
3.  $\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$
4.  $\{10, 20, 30, \dots, 80, 90\}$
5.  $\{1, 4, 16, \dots, 81, 100\}$
6.  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23\}$

วิธีทำ พิจารณาแต่ละข้อสามารถเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขสมาชิกได้ดังนี้

1.  $\{1, 2\} = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$
2.  $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$
3.  $\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
4.  $\{10, 20, 30, \dots, 80, 90\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 10 \mid x \text{ และ } x \leq 100\}$
5.  $\{1, 4, 16, \dots, 81, 100\} = \{x^2 \mid 1 \leq x \leq 10\}$
6.  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะและ } x \leq 25\}$

### 1.1.3 การเขียนเซตด้วยแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ (Venn-Euler Diagram)

แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ เป็นแผนภาพที่ใช้เขียนแทนเซตรวมถึงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต เป็นวิธีการเขียนเซตที่ง่ายต่อความเข้าใจ สามารถมองภาพชัดเจนขึ้น และสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น โดยมี ออยเลอร์ เลออนฮาร์ด (Euler, Leonhard : 1707 - 1783) นักคณิตศาสตร์ชาวสวีเดนแลนดเป็นผู้นำมาใช้เป็นครั้งแรก หลังจากนั้น เวนน์ จอห์น (Venn, John : 1834 -1923) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้นำมาใช้อธิบายแนวคิดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตร์ทั้งสองท่านเขียนแทนเซตด้วยรูปปิดใดๆ โดยใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ และเขียนเซตอื่นๆ ลงในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 การเขียนเซตด้วยแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

## 1.2 ชนิดของเซต

เซตสามารถจำแนกชนิดโดยพิจารณาจากจำนวนสมาชิกของเซตโดยแบ่งเป็นเซตที่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้ เซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้ และเซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย ดังนี้

### บทนิยาม 1.2.1

เซตจำกัด หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกค่าใดค่าหนึ่ง หรือศูนย์ นั่นคือ เป็นเซตที่บอกได้แน่นอนว่ามีสมาชิกกี่ตัว

กำหนดให้เซต  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  เราสามารถบอกได้ว่า  $A$  มีสมาชิก 10 ตัว ดังนั้น  $A$  เป็นเซตจำกัด ในทางกลับกัน เซต  $B = \{0, 1, 2, \dots\}$  ไม่สามารถหาจำนวนนับที่เท่ากับจำนวนสมาชิกของ  $B$  ได้ จึงกล่าวได้ว่า  $B$  ไม่เป็นเซตจำกัด หรือเรียกเซต  $B$  ว่าเซตอนันต์ ดั่งนิยามถัดไป

### บทนิยาม 1.2.2

เซตอนันต์ หมายถึง เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด หรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด

นอกเหนือไปจากเซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้อย่างเซตอนันต์แล้วยังมีเซตที่ไม่มีจำนวนสมาชิกอยู่เลย

**บทนิยาม 1.2.3**

เซตว่าง หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิก ใช้สัญลักษณ์  $\emptyset$  หรือ  $\{\}$

พิจารณาเซต  $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 0\}$  จะเห็นว่าไม่มีจำนวนนับตัวใดเลยที่น้อยกว่า 0 จึงกล่าวว่าเซต  $A$  เป็นเซตว่าง

**บทนิยาม 1.2.4**

เอกภพสัมพัทธ์ หมายถึง เซตที่ถูกกำหนดขอบข่ายของสมาชิกของเซตที่ต้องการศึกษาแทนด้วยสัญลักษณ์  $U$

**ข้อตกลง** ถ้ากล่าวถึงเซตของจำนวนโดยไม่มีการกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์ คือเซตของจำนวนจริง และ  $n(A)$  หมายถึง จำนวนสมาชิกในเซต  $A$

**1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต**

เมื่อเราพิจารณาเซต 2 เซตใดๆ เราจะพิจารณาว่า 2 เซตที่เราสนใจนั้นมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร ซึ่งสามารถแบ่งความสัมพันธ์ต่างๆของเซตทั้งการเป็นสับเซต การเท่ากันของเซต การเทียบเท่ากันของเซต นอกจากนี้ยังนำไปสู่การสร้างเซตกำลัง ดังนี้

**บทนิยาม 1.3.1**

จะกล่าวว่า  $A$  เป็นสับเซตของเซต  $B$  ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต  $A$  เป็นสมาชิก ของเซต  $B$  ใช้สัญลักษณ์  $\subset$  แทน การเป็นสับเซต และ  $\not\subset$  แทน ไม่เป็นสับเซต เราสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้เป็น  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$  นอกจากนี้ ถ้า  $A \subset B$  และ  $A \neq B$  แล้วจะเรียก  $A$  ว่าเป็นสับเซตแท้ของ  $B$  ถ้า  $A = B$  จะเรียก  $A$  ว่าเป็นสับเซตไม่แท้ของ  $B$

**ข้อสังเกต**  $\emptyset$  เป็นสับเซตของทุกๆเซต

**ตัวอย่างที่ 1.3** กำหนดให้  $A$  เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ  $B$  เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ พิจารณาทุกๆจำนวนเต็ม เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น  $A \subset B$  ในทางกลับกัน 0.5 เป็นจำนวนตรรกยะ แต่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ดังนั้น  $B \not\subset A$

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$$

เห็นได้ชัดว่า  $A$  เป็นสับเซตแท้ของ  $B$  เนื่องจาก  $A \neq B$  แต่  $B$  เป็นสับเซตไม่แท้ของ  $C$  เนื่องจาก  $B = C$

### ทฤษฎีบท 1.3.1

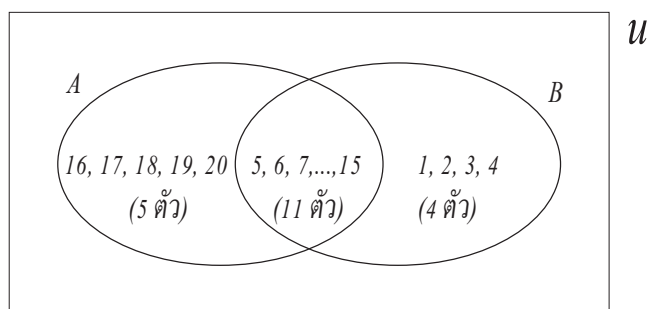
กำหนดให้  $A$ ,  $B$  และ  $C$  เป็นเซตใดๆ คุณสมบัติของสับเซต มีดังนี้

1. ถ้า  $A$  เป็นเซตจำกัดและมีสมาชิก  $n$  ตัวแล้ว  $A$  มีสับเซตทั้งหมด  $2^n$  สับเซต
2. ถ้า  $A \subset B$  และ  $B \subset C$  แล้ว  $A \subset C$

เราสามารถทำความเข้าใจจากเซตจำกัดที่มีจำนวนสมาชิกน้อยๆ เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ เช่น กำหนดให้เซต  $A = \{1, 2\}$  จะเห็นว่า  $n(A) = 2$  ดังนั้น จำนวนสับเซตทั้งหมดของ  $A$  เท่ากับ  $2^{n(A)} = 2^2 = 4$  นั่นคือ  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

ตัวอย่างที่ 1.5 ถ้า  $A = \{5, 6, 7, \dots, 20\}$  และ  $B = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$  แล้วจำนวนสมาชิกในเซต  $\{x | x \text{ เป็นสับเซตของ } A \text{ และ } x \text{ ไม่เป็นสับเซตของ } B\}$  เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จาก  $A = \{5, 6, 7, \dots, 20\}$  จะได้  $n(A) = 16$   
 และ  $B = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$  จะได้  $n(B) = 15$   
 $A \cap B = \{5, 6, 7, \dots, 15\}$  จะได้  $n(A \cap B) = 11$   
 นำไปวาดแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ ประกอบการพิจารณา ดังนี้



พิจารณาเซต  $X$  ซึ่ง  $X \subset A$  และ  $X \not\subset B$  ดังนี้

ขั้นแรก สร้างเซต  $X$  จากสมาชิก  $5, 6, 7, \dots, 15$  ซึ่งมี 11 ตัว ได้  $2^{11}$  วิธี

ขั้นที่สอง จาก  $X \not\subset B$  แสดงว่า เซต  $X$  ต้องมี  $16, 17, 18, 19, 20$  เป็นสมาชิกอยู่ด้วยอย่างน้อย 1 ตัว จึงสร้างเซต  $X$  จากสมาชิกเหล่านี้ได้  $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$  วิธี

ดังนั้น  $\{X | X \subset A \text{ และ } X \not\subset B\}$  มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ  $31 \times 2^{11}$

### บทนิยาม 1.3.2

เซต  $A$  เท่ากับเซต  $B$  ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ  $A$  เป็นสมาชิกของ  $B$  และทุกสมาชิกของ  $B$  เป็นสมาชิกของ  $A$  (นั่นคือ  $A$  และ  $B$  มีสมาชิกเหมือนกัน) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A = B$$

ถ้าเซต  $A$  และเซต  $B$  มีสมาชิกบางตัวแตกต่างกัน เรากล่าวว่า เซต  $A$  ไม่เท่ากับเซต  $B$  ในกรณีนี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $A \neq B$  (ปริญญญา พัฒนางกูร, 2555:4)

ตัวอย่างที่ 1.6 เซต  $A$  และเซต  $B$  ที่กำหนดให้เป็นเซตที่เท่ากัน

$$A \text{ เป็นเซตของจำนวนนับ} \iff B = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$A = \{1, -3\} \iff B = \{x | x^2 + 2x - 3 = 0\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \iff B = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$$

### บทนิยาม 1.3.3

สำหรับเซตจำกัดสองเซตใดๆ จะถูกกล่าวว่าเป็นเซตที่เทียบเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองเซตมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้  $A = \{1, 2, 3\}$  และ  $B = \{a, b, c\}$  เมื่อพิจารณาแล้วเราสามารถกล่าวได้ว่าเซต  $A$  เทียบเท่าเซต  $B$  เนื่องจาก  $n(A) = 3 = n(B)$

### บทนิยาม 1.3.4

เพาเวอร์เซต  $A$  คือเซตของสับเซตทั้งหมดของ  $A$  ใช้สัญลักษณ์  $P(A)$  แทนเพาเวอร์เซตของ  $A$  นั่นคือ  $P(A) = \{x | x \subset A\}$

ข้อสังเกต กำหนดให้  $A$  เป็นเซตใดๆ

1.  $P(A) \neq \emptyset$
2.  $\emptyset \in P(A)$
3.  $\emptyset \subset P(A)$
4.  $A \in P(A)$  เสมอ

**ตัวอย่างที่ 1.8** กำหนดให้  $A = \{1, 2\}$  พิจารณาสับเซตทั้งหมดของ  $A$  ประกอบด้วย  $\emptyset, \{1\}, \{2\}$  และ  $\{1, 2\}$  ดังนั้น  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

**ทฤษฎีบท 1.3.2**

กำหนดให้  $A$  เป็นเซตใดๆ

1. ถ้า  $A$  มีสมาชิก  $n$  ตัวแล้ว  $P(A)$  มีจำนวนสมาชิกทั้งหมด  $2^n$  ตัว
2.  $A \subset B$  ก็ต่อเมื่อ  $P(A) \subset P(B)$

**ตัวอย่างที่ 1.9** กำหนดให้  $A = \{0, \{1, 2\}, \{3\}\}$  ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1.  $1 \in A$
2.  $\{1, 2\} \in A$
3.  $2 \in A$
4.  $\{\{1, 2\}\} \in A$
5.  $\{0, \{3\}\} \subset A$

*วิธีทำ* เห็นได้ชัดว่าข้อ 2. และข้อ 5. ถูกต้อง ส่วนข้อ 1. ข้อ 3. และข้อ 4. ผิด

**ตัวอย่างที่ 1.10** กำหนดให้  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  จงหา

1. จำนวนสับเซตทั้งหมดของ  $A$
2. จำนวนสับเซตแท้ของ  $A$
3. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว
4. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว

*วิธีทำ*  $A$  มีจำนวนสมาชิก 4 ตัว นั่นคือ  $n(A) = 4$

1. จำนวนสับเซตทั้งหมดของ  $A$  เท่ากับ  $2^{n(A)} = 2^4 = 16$  ตัว
2. จำนวนสับเซตแท้ของ  $A$  เท่ากับ  $2^{n(A)} - 1 = 2^4 - 1 = 15$  ตัว
3. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว หมายถึง จำนวนสับเซตทั้งหมดที่ไม่รวมเซตว่าง ซึ่งเท่ากับ  $2^{n(A)} - 1 = 2^4 - 1 = 15$  ตัว

4. จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว หมายถึง จำนวนสับเซตทั้งหมดที่ไม่รวมเซตว่าง และเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว รวมทั้งหมดเท่ากับ 5 ตัว ดังนั้น จำนวนสับเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว เท่ากับ  $16 - 5 = 11$

**ตัวอย่างที่ 1.11** กำหนดให้  $S = \{\phi, a, b, \{a\}, \{a, b\}, \{a, \{b\}\}\}$  ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1.  $\{a, b\} \in S$       2.  $\{a, b\} \subset S$       3.  $\{a, \{b\}\} \in S$       4.  $\{a, \{b\}\} \subset S$

**วิธีทำ** ข้อ 1 ถูก เพราะว่า  $\{a, b\} \in S$

ข้อ 2 ถูก เพราะว่า  $a \in S$  และ  $b \in S$  ทำให้  $\{a, b\} \subset S$

ข้อ 3 ถูก เพราะว่า  $\{a, \{b\}\} \in S$

ข้อ 4 ผิด เพราะว่า  $\{b\} \notin S$  ทำให้  $\{a, \{b\}\} \not\subset S$

**ตัวอย่างที่ 1.12** กำหนดให้  $A, B$  เป็นเซตซึ่ง  $n(A) = a, n(B) = b$  นิยาม  $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$  ถ้า  $n[(A - B) \cup (B - A)] = 7$  และ  $n(A \times B) = 40$  แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต  $\{C | C \subseteq A \cup B$  และ  $n(C) \leq 2\}$  เท่ากับเท่าไร

**วิธีทำ** จาก  $A, B$  เป็นเซต ซึ่ง  $n(A) = a, n(B) = b$

และสมมติให้  $n(A \cap B) = m$

จาก  $n[(A - B) \cup (B - A)] = 7$

จะได้  $(a - m) + (b - m) = 7$

$$a + b = 2m + 7 \quad \dots\dots(1)$$

และจาก  $n(A \times B) = 40$

จะได้ว่า  $ab = 40 \quad \dots\dots(2)$

จากข้อมูลในโจทย์พบว่า  $a, b, m$  ต้องเป็นจำนวนนับ ซึ่ง  $m \leq a$  และ  $m \leq b$

จาก (2) พบว่า มี  $(a, b)$  หลายชุด เช่น  $(1, 40), (2, 20), (4, 10), (5, 8)$  เป็นต้น แต่

จาก (1) พบว่า  $a + b$  ต้องเป็นจำนวนคี่เท่านั้น จึงเหลือ  $(a, b)$  ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดเพียงแค่  $(1, 40), (5, 8), (8, 5)$  และ  $(40, 1)$

- พิจารณากรณีที่  $(a, b)$  เป็น  $(1, 40)$  หรือ  $(40, 1)$  แทนใน (1) จะได้

$$1 + 40 = 2m + 7$$

$$m = 17 \text{ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ } 17 > 1$$

- พิจารณากรณีที่  $(a, b)$  เป็น  $(5, 8)$  หรือ  $(8, 5)$  แทนใน (1) จะได้

$$5 + 8 = 2m + 7$$

$$m = 3$$

สรุปว่า  $n(A \cap B) = 3$

ดังนั้น  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$= 5 + 8 - 3 = 10$$

ให้  $C$  เป็นสับเซตของ  $A \cup B$  ซึ่ง

$$\text{ถ้า } n(C) = 2 \text{ จะได้ } C \text{ ทั้งหมดเท่ากับ } \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = 45 \text{ วิธี}$$

$$\text{ถ้า } n(C) = 1 \text{ จะได้ } C \text{ ทั้งหมดเท่ากับ } \binom{10}{1} = 10 \text{ วิธี}$$

$$\text{ถ้า } n(C) = 0 \text{ จะได้ } C \text{ ทั้งหมดเท่ากับ } \binom{10}{0} = 1 \text{ วิธี คือ } \phi$$

ดังนั้น จำนวนสมาชิกของเซต  $\{C | C \subseteq A \cup B \text{ และ } n(C) \leq 2\}$  เท่ากับ จำนวนเซต  $C$  ซึ่งเป็นสับเซตของ  $A \cup B$  และสมาชิกในเซต  $C$  ไม่เกิน 2 ตัว  $= 45 + 10 + 1 = 56$

**ตัวอย่างที่ 1.13** กำหนดให้  $A = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}\}$  และ  $P(A)$  เป็นเพาเวอร์เซตของเซต  $A$  ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1.  $\{\phi\} \subset P(A)$
2.  $\{\phi\} \in P(A)$
3.  $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset P(A)$
4.  $\{\{a, b\}\} \in P(A)$

**วิธีทำ** จาก  $A = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}\}$  และจากความรู้ที่ว่า  $B \subset A$  ก็ต่อเมื่อ  $B \in P(A)$

- ข้อ 1 ถูก เพราะ  $\phi \in P(A)$  เสมอ ทำให้  $\{\phi\} \subset P(A)$
- ข้อ 2 ถูก เพราะ จาก  $\phi \in A$  ทำให้  $\{\phi\} \subset A$  ดังนั้น  $\{\phi\} \in P(A)$
- ข้อ 3 ผิด เพราะ จาก  $\{a\} \not\subset A$  และ  $\{a, b\} \not\subset A$  ทำให้  $\{a\}, \{a, b\} \notin P(A)$   
ดังนั้น  $\{\{a\}, \{a, b\}\} \not\subset P(A)$
- ข้อ 4 ถูก เพราะ  $\{a, b\} \in A$  ทำให้  $\{\{a, b\}\} \subset A$  ดังนั้น  $\{\{a, b\}\} \in P(A)$

**ตัวอย่างที่ 1.14** ถ้า  $A = \{\phi, \{\phi\}, 0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$  และ  $P(A)$  คือเพาเวอร์เซตของ  $A$  แล้วเซต  $(P(A) - A) \cup (A - P(A))$  มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว

**วิธีทำ** จาก  $A = \{\phi, \{\phi\}, 0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$  จะได้  $n(A) = 6$

ดังนั้น  $P(A)$  มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ  $2^{n(A)} = 2^6 = 64$

พิจารณาสมาชิกที่ซ้ำกันของ  $P(A)$  และ  $A$  ได้แก่  $\phi, \{\phi\}, \{0\}$  ซึ่งมี 3 สมาชิก

จะได้  $P(A) - A$  มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ  $64 - 3 = 61$

และ  $A - P(A)$  มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ  $6 - 3 = 3$

ดังนั้น  $(P(A) - A) \cup (A - P(A))$  มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ  $61 + 3 = 64$

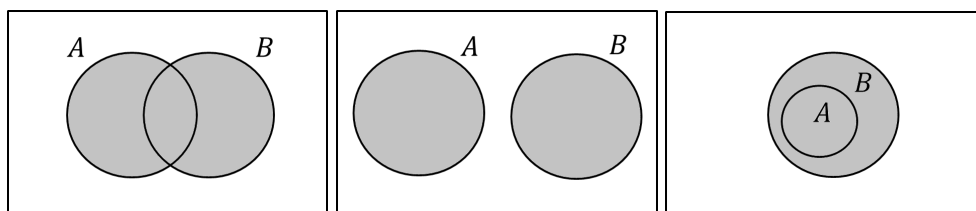
## 1.4 การดำเนินการระหว่างเซต

การดำเนินการของเซตคือการสร้างเซตใหม่ภายใต้การดำเนินการ สมมติว่า  $A$  และ  $B$  เป็นเซตใดๆ เราจะจำแนกเป็นการดำเนินการต่างๆ ดังนี้

### บทนิยาม 1.4.1

ผลบวก (union) ของเซต  $A$  และเซต  $B$  คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต  $A$  หรือเซต  $B$  หรือทั้งสองเซต เราสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้เป็น  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

เมื่อพิจารณาผลบวกเราสามารถเขียนเป็นแผนภาพเวนน – ออยเลอร์ได้ ดังรูปที่ 1.2

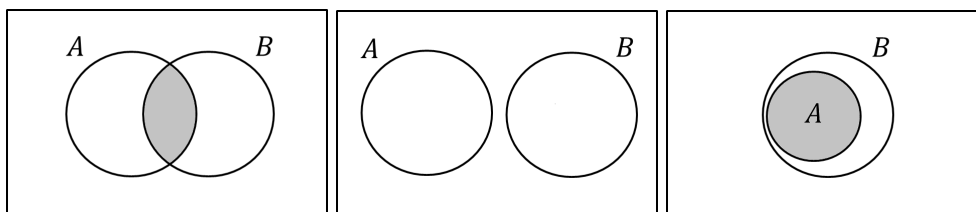


รูปที่ 1.2 บริเวณแรเงาแสดง  $A \cup B$  ในรูปแบบต่างๆ

### บทนิยาม 1.4.2

ผลตัด (intersection) ของเซต  $A$  และเซต  $B$  คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งของเซต  $A$  และเซต  $B$  เราสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้เป็น  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$

เมื่อพิจารณาผลตัดเขียนเป็นแผนภาพเวนน – ออยเลอร์ ดังรูปที่ 1.3

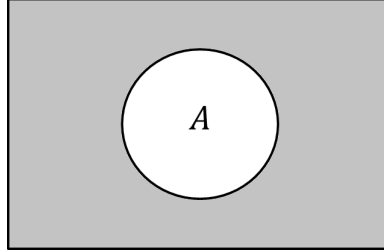


รูปที่ 1.3 บริเวณแรเงาแสดง  $A \cap B$  ในรูปแบบต่างๆ

### บทนิยาม 1.4.3

ให้  $A$  เป็นสับเซตเอกภาพสัมพัทธ์  $U$  คอมพลีเมนต์ (complement) ของเซต  $A$  คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของ  $U$  แต่ไม่เป็นสมาชิกของ  $A$  เราสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ได้เป็น  $A' = \{x \mid x \in U \text{ และ } x \notin A\}$

เมื่อพิจารณาคอมพลีเมนต์สามารถเขียนเป็นแผนภาพเวนน – ออยเลอร์ ดังรูปที่ 1.4



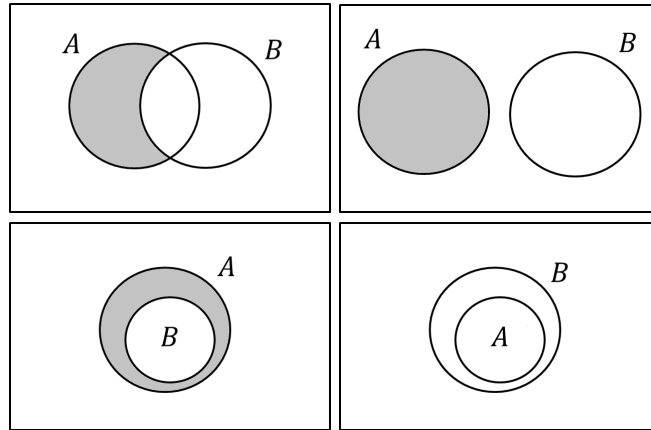
รูปที่ 1.4 บริเวณแรเงาแสดง  $A'$

**บทนิยาม 1.4.4**

ผลต่าง (different) ระหว่างเซต  $A$  และเซต  $B$  คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต  $A$  ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต  $B$  เขียนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

เมื่อพิจารณาผลต่าง สามารถเขียนเป็นแผนภาพเวนน – ออยเลอร์ ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 บริเวณแรเงาแสดง  $A - B$  ในรูปแบบต่างๆ

กำหนดให้  $A, B$  และ  $C$  เป็นเซต คุณสมบัติของการดำเนินการ มีดังนี้

กฎนิพจน์ (Idempotent Laws)

1.  $A \cup A = A$
2.  $A \cap A = A$

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Laws)

1.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

กฎการสลับที่ (Commutative Laws)

1.  $A \cup B = B \cup A$
2.  $A \cap B = B \cap A$

กฎการแจกแจง (Distributive Laws)

1.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

กฎเอกลักษณ์ (Identity Laws)

1.  $A \cup \emptyset = A$

$$2. A \cap U = A$$

$$3. A - \emptyset = A$$

กฎเดออร์มอร์แกน (De Morgan's Laws)

$$1. (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$2. (A \cap B)' = A' \cup B'$$

กฎของคอมพลีเมนต์ (Complement Laws)

$$1. A' \cup A = U$$

$$2. A' \cap A = \emptyset$$

$$3. (A')' = A$$

$$4. U' = \emptyset$$

$$5. \emptyset' = U$$

$$6. A \cap B' = A - B$$

ตัวอย่างที่ 1.15 กำหนดให้  $U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  เป็นเอกภพสัมพัทธ์  $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$   $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  และ  $C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$  จงหาเซตของคำตอบในแต่ละข้อที่กำหนดให้

$$1. (A \cup B) \cap C$$

$$2. (A - B) - C$$

$$3. (A - B) \cap C$$

$$4. (C \cap A') \cap B'$$

$$5. (A - B) \cup (A - C)$$

$$6. (A \cup C) \cap B'$$

วิธีทำ พิจารณา  $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A - B = \{4, 6, 8\}$ ,  $A' = \{0, 1, 2, 3, 9, 10\}$ ,  $B' = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $A - C = \{5\}$ ,  $C \cap A' = \{2, 3\}$  และ  $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$1. (A \cup B) \cap C = \{3, 4, 6, 7, 8\}$$

2.  $(A - B) - C = \emptyset$
3.  $(A - B) \cap C = \{4, 6, 8\}$
4.  $(C \cap A') \cap B' = \{2\}$
5.  $(A - B) \cup (A - C) = \{4, 5, 6, 8\}$
6.  $(A \cup C) \cap B' = \{2, 4, 6, 8\}$

ตัวอย่างที่ 1.16 จงแสดงว่า  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)' \\
 &= A \cap (B' \cup C') \\
 &= (A \cap B') \cup (A \cap C') \\
 &= (A - B) \cup (A - C)
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.17 กำหนดให้  $A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{b, c, d\}$ ,  $D = \{a, b, c, d\}$  และ  $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$  ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1.  $\{A \cap B\} \in M$
2.  $\{D - A\} \cap D \in M$
3.  $(D - B) \cap (D - C) \subset M$
4.  $B \cup (D - C) \subset M$

วิธีทำ ข้อ 1 ผิด เนื่องจาก  $\{A \cap B\} = \{\{a\} \cap \{a, b\}\}$   
 $= \{\{a\}\} \notin M$

ข้อ 2 ผิด เนื่องจาก  $\{D - A\} \cap D = \{\{a, b, c, d\} - \{a\}\} \cap \{a, b, c, d\}$   
 $= \{\{b, c, d\}\} \cap \{a, b, c, d\}$   
 $= \emptyset \notin M$

ข้อ 3 ถูก เนื่องจาก  $(D - B) \cap (D - C) = (D \cap B') \cap (D \cap C')$   
 $= D \cap (B' \cap C')$   
 $= D \cap (B \cup C)'$   
 $= D - (B \cup C)$   
 $= \{a, b, c, d\} - \{a, b, c, d\}$   
 $= \emptyset \subset M$

ข้อ 4 ผิด เนื่องจาก  $B \cup (D - C) = B \cup (\{a, b, c, d\} - \{b, c, d\})$   
 $= B \cup \{a\}$   
 $= \{a, b\} \cup \{a\}$

$$= \{a, b\} \not\subset M$$

ตัวอย่างที่ 1.18 กำหนดให้  $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$  ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

$$1. (A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\} \quad 2. (A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, \{a\}, \{b\}\}$$

$$3. (A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{\{b, c\}\} \quad 4. (A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{b, c\}$$

วิธีทำ พิจารณาข้อ 1 และข้อ 2 ดังนี้

$$\text{จาก} \quad A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$$

$$A - \{b, c\} = A \quad (\because \text{ในเซต } A \text{ ไม่มี } b \text{ และ } c)$$

$$\begin{aligned} \therefore (A - \{b, c\}) \cup \{b\} &= A \cup \{b\} = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\} \cup \{b\} \\ &= \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\} \end{aligned}$$

ดังนั้น ข้อ 1 ถูก แต่ ข้อ 2 ผิด

พิจารณาข้อ 3 และข้อ 4 ดังนี้

$$\text{จาก} \quad A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$$

$$A - \{a, \{b\}\} = \{\{a\}, \{b, c\}\} \quad (\because \text{ในเซต } A \text{ มี } a \text{ และ } \{b\})$$

$$\begin{aligned} \therefore (A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} &= \{\{a\}, \{b, c\}\} - \{a\} \quad (\text{ทั้ง 2 เซตไม่มีสมาชิกซ้ำกัน}) \\ &= \{\{b, c\}\} \end{aligned}$$

ดังนั้น ข้อ 3 และข้อ 4 ผิด

ตัวอย่างที่ 1.19 ให้  $A, B, C, D$  เป็นเซตใดๆ  $(A \cap C) - (B \cup D)$  เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

$$1. (A - B) \cap (D - C) \quad 2. (A - B) \cap (C - D)$$

$$3. (A - B) \cup (D - C) \quad 4. (A - B) \cup (C - D)$$

วิธีทำ จากความรู้ที่ว่า  $A - B = A \cap B'$

$$\text{และ} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad (A \cap C) - (B \cup D) &= (A \cap C) \cap (B \cup D)' = (A \cap C) \cap (B' \cap D') \\ &= (A \cap B') \cap (C \cap D') = (A - B) \cap (C - D) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.20 กำหนดให้  $B = \{m, n\}$  และ  $C = \{m, n, r\}$  ถ้า  $\{m\} \subset A$  และ  $A \subset C$  โดยที่  $A \not\subset B$  แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

$$1. B - A = \phi \quad 2. \{m\} \subset A \cap B \quad 3. (C - A) \cap B \subset \{n, r\} \quad 4. A \cup B = \{m, n, r\}$$

วิธีทำ จากเงื่อนไข  $\{m\} \subset A$  และ  $A \subset C$  จึงมีเซต  $A$  ได้ทั้งหมด 4 แบบ ได้แก่  $\{m\}$ ,  $\{m, n\}$ ,  $\{m, r\}$ ,  $\{m, n, r\}$  แต่  $A \not\subset B$  จึงได้ว่า เซต  $A$  ที่เป็นไปได้คือ  $\{m, r\}$  หรือ  $\{m, n, r\}$  เท่านั้น

พิจารณาแต่ละข้อ ดังนี้

ข้อ 1 ผิด เพราะถ้า  $A = \{m, r\}$  แล้ว  $B - A = \{m, n\} - \{m, r\} = \{n\}$  ซึ่ง  $B - A \neq \phi$

ข้อ 2 ถูก เพราะ  $A \cap B$  ต้องมี  $m$  เป็นสมาชิกด้วยเสมอ ทำให้  $\{m\} \subset A \cap B$

ข้อ 3 ถูก เพราะ ถ้าให้  $A = \{m, r\}$  จะได้

$$(C - A) \cap B = (\{m, n, r\} - \{m, r\}) \cap \{m, n\} = \{n\} \cap \{m, n\} = \{n\} \text{ ซึ่งเป็นสับเซตของ } \{n, r\}$$

หรือถ้าให้  $A = \{m, n, r\}$  จะได้

$$(C - A) \cap B = (\{m, n, r\} - \{m, n, r\}) \cap \{m, n\} = \phi \cap \{m, n\} = \phi \text{ ซึ่งเป็นสับเซตของ } \{n, r\}$$

ดังนั้น  $(C - A) \cap B \subset \{n, r\}$  เสมอ

ข้อ 4 ถูก เพราะถ้าให้  $A = \{m, r\}$  จะได้

$$A \cup B = \{m, r\} \cup \{m, n\} = \{m, n, r\}$$

หรือถ้าให้  $A = \{m, n, r\}$  จะได้

$$A \cup B = \{m, n, r\} \cup \{m, n\} = \{m, n, r\}$$

ดังนั้น  $A \cup B = \{m, n, r\}$  เสมอ

**ตัวอย่างที่ 1.21** กำหนดให้  $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  และ  $Y = \{(A, B) | A, B \text{ เป็นสับเซตของ } X, A \cup B = X \text{ และ } A \cap B = \{1\}\}$  จำนวนสมาชิกของเซต  $Y$  เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จาก  $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  และ  $A, B$  เป็นสับเซตของ  $X$  ซึ่ง  $A \cup B = X$  และ  $A \cap B = \{1\}$

นั่นคือ  $A$  และ  $B$  ต้องมี 1 เป็นสมาชิกร่วมกัน ส่วนสมาชิก  $2, 3, \dots, 10$  ต้องแบ่งใส่ในเซต  $A$  ส่วนหนึ่ง แล้วที่เหลือทั้งหมดใส่ลงในเซต  $B$  ( $\because A \cup B = X$ )

การเลือกสมาชิก  $2, 3, \dots, 10$  มาใส่ตัวก็ได้ (ไม่เลือกเลยสักตัวก็ได้) จึงเปรียบเสมือนการหาสับเซตของ  $\{2, 3, \dots, 10\}$  นั่นเอง ซึ่งสร้างได้ทั้งหมด  $2^9$  แบบ

และเมื่อเราสร้างเซต  $A$  แล้ว เซต  $B$  ที่ต้องการนั้นจะถูกบังคับสมาชิกไปโดยปริยาย คือนำสมาชิกที่เหลือจากการสร้างเซต  $A$  ไปสร้างเซต  $B$  นั่นเอง

ดังนั้น จะมี  $(A, B)$  ทั้งหมด  $2^9$  แบบ

จะได้ว่า  $Y = \{(A, B) | A, B \text{ เป็นสับเซตของ } X, A \cup B = X \text{ และ } A \cap B = \{1\}\}$

มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ  $2^9$  สมาชิก

**ตัวอย่างที่ 1.22** สำหรับเซต  $X$  ใดๆ ให้  $P(X)$  แทนเพาเวอร์เซตของ  $X$  และ  $n(X)$  แทนจำนวนสมาชิกของ  $X$

ถ้า  $A$  และ  $B$  เป็นเซตซึ่ง  $n(P(A \cap B)) = 4$  และ  $n((A \cap B) \times (A \cup B)) = 12$

แล้ว  $n(P(A \cup B) - P((A - B) \cup (B - A)))$  เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จาก  $n(P(A \cap B)) = 4 = 2^2$

จะได้  $2^{n(A \cap B)} = 2^2$

แสดงว่า  $n(A \cap B) = 2$

และจาก  $n((A \cap B) \times (A \cup B)) = 12$

จะได้  $n(A \cap B) \cdot n(A \cup B) = 12$

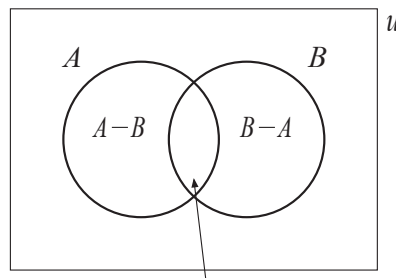
$$2 \cdot n(A \cup B) = 12$$

แสดงว่า  $n(A \cup B) = \frac{12}{2} = 6$

ดังนั้น  $P(A \cup B)$  มีสมาชิกทั้งหมด  $2^{n(A \cup B)} = 2^6 = 64$  ตัว .....(1)

จากข้อมูล  $n(A \cap B) = 2$  และ  $n(A \cup B) = 6$  วาดภาพของเวนน-ออยเลอร์ประกอบ

การพิจารณา ดังนี้



$A \cap B$  มีสมาชิก 2 ตัว

จึงได้ว่า  $n((A - B) \cup (B - A)) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

$$= 6 - 2 = 4$$

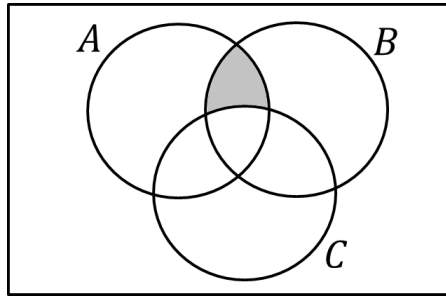
ดังนั้น  $P((A - B) \cup (B - A))$  มีสมาชิกทั้งหมด  $2^4 = 16$  ตัว .....(2)

เพราะว่า  $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$  และจาก (1) และ (2) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} n(P(A \cup B) - P((A - B) \cup (B - A))) &= n(P(A \cup B)) - n(P((A - B) \cup (B - A))) \\ &= 64 - 16 = 48 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 1.23** จงแรเงาบริเวณคำตอบของ  $(A \cap B) - C$

วิธีทำ



### 1.5 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

กำหนดให้  $U$  เป็นเอกภพสัมพัทธ์  $A$  และ  $B$  เป็นเซตจำกัด ซึ่งต่างก็เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์  $U$  เราจะกล่าวว่า

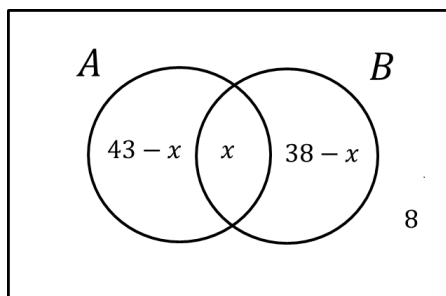
1. ถ้า  $A \cap B = \emptyset$  แล้ว  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
2. ถ้า  $A \cap B \neq \emptyset$  แล้ว  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ในทำนองเดียวกัน ให้  $U$  เป็นเอกภพสัมพัทธ์  $A$ ,  $B$  และ  $C$  เป็นเซตจำกัด ซึ่งต่างก็เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์  $U$  เราจะกล่าวว่า

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

**ตัวอย่างที่ 1.24** นักเรียนห้องหนึ่งมีทั้งหมด 60 คน ชอบเรียนภาษาอังกฤษ 43 คน ชอบเรียนคณิตศาสตร์ 38 คน ไม่ชอบเรียนทั้งสองวิชา 8 จงหาจำนวนนักเรียนที่ชอบเรียนทั้งสองวิชา

**วิธีที่ 1** สมมติให้นักเรียนที่ชอบเรียนภาษาอังกฤษ ชอบเรียนคณิตศาสตร์เป็น  $A$  และ  $B$  ตามลำดับ ให้นักเรียนที่ชอบเรียนทั้งสองวิชาเป็น  $x$  เขียนเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ได้เป็น



ดังนั้น

$$52 = (43 - x) + x + (38 - x)$$

$$= 81 - x$$

$$x = 29$$

นั่นคือ จำนวนนักเรียนที่ชอบเรียนทั้งสองวิชามีทั้งหมด 29 คน

วิธีที่ 2 สมมติให้นักเรียนที่ชอบเรียนภาษาอังกฤษ ชอบเรียนคณิตศาสตร์เป็น  $A$  และ  $B$  ตามลำดับ  
ดังนั้น  $n(A) = 43$  และ  $n(B) = 38$  พิจารณา

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - 8 \\ &= 60 - 8 \\ &= 52 \end{aligned}$$

จากคุณสมบัติ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 43 + 38 - 52 \\ &= 29 \end{aligned}$$

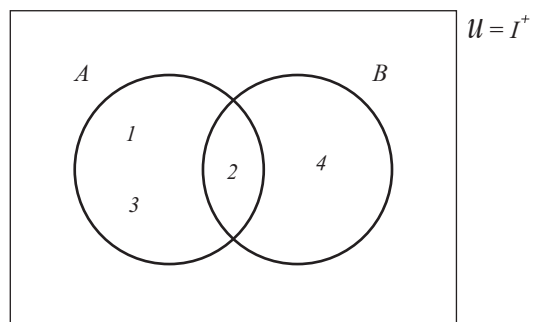
นั่นคือ จำนวนนักเรียนที่ชอบเรียนทั้งสองวิชามีทั้งหมด 29 คน

**ตัวอย่างที่ 1.25** ถ้า  $A$  และ  $B$  เป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มบวก โดยที่  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A \cap B = \{2\}$  และ  $A$  มีสมาชิก 3 ตัว แล้วความเป็นไปได้ของเซต  $A$  และ  $B$  มีทั้งหมดกี่กรณี

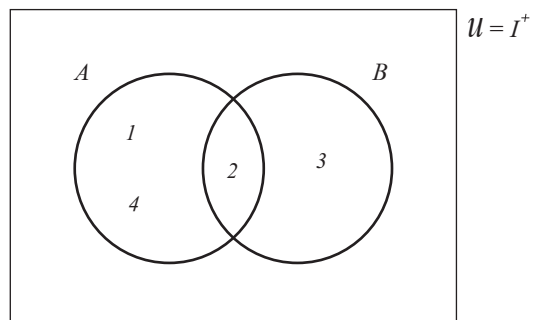
1. 1 กรณี                      2. 2 กรณี                      3. 3 กรณี                      4. 4 กรณี

**วิธีทำ** กำหนดให้  $A$  และ  $B$  เป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มบวกโดยที่  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A \cap B = \{2\}$  และ  $A$  มีสมาชิก 3 ตัว จึงนำมาวาดแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ได้ 3 กรณี ดังนี้

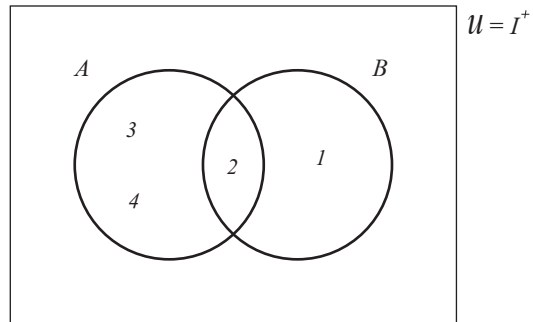
**กรณีที่ 1**



**กรณีที่ 2**



## กรณีที่ 3



ตัวอย่างที่ 1.26 ในการสำรวจความนิยมเกี่ยวกับเพลงโดยสอบถามจากนักเรียนโรงเรียนหนึ่งจำนวน 300 คน พบว่าแต่ละคนชอบเพลงลูกทุ่ง เพลงลูกกรุง หรือเพลงไทยเดิมอย่างน้อยหนึ่งประเภท ปรากฏว่า

120 คน ชอบเพลงลูกทุ่ง

70 คน ชอบเพลงลูกกรุงอย่างเดียว

80 คน ชอบเพลงไทยเดิมอย่างเดียว

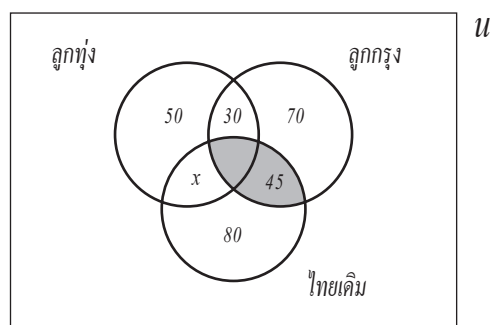
45 คน ชอบทั้งเพลงลูกกรุงและเพลงไทยเดิม

30 คน ชอบทั้งเพลงลูกทุ่งและเพลงลูกกรุง แต่ไม่ชอบเพลงไทยเดิม

50 คน ไม่ชอบเพลงไทยเดิมและไม่ชอบเพลงลูกกรุง

จะมีคนชอบทั้งเพลงลูกทุ่งและเพลงไทยเดิมแต่ไม่ชอบเพลงลูกกรุงกี่คน

วิธีทำ นำข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ไปวาดแผนภาพของเวนน-ออยเลอร์ ดังนี้



ให้  $x$  แทนจำนวนคนที่ชอบทั้งเพลงลูกทุ่งและเพลงไทยเดิม แต่ไม่ชอบเพลงลูกกรุง  
จากนักเรียนทั้งหมดมีจำนวน 300 คน และจากรูป จะได้

$$50 + 30 + 70 + 45 + 80 + x = 300$$

$$x = 25$$

ดังนั้น จะมีคนที่ชอบทั้งเพลงลูกทุ่งและเพลงไทยเดิมแต่ไม่ชอบเพลงลูกกรุงทั้งหมด 25

คน

**ตัวอย่างที่ 1.27** จากการสำรวจความชื่นชอบรายการทีวีของคนในหมู่บ้านหนึ่งซึ่งมีประชากรทั้งสิ้น 200 คน ผลปรากฏว่า ชอบดูรายการข่าว 104 คน ชอบดูละคร 106 คน ชอบดูรายการกีฬา 62 คน ชอบดูข่าวและละคร 45 คน ชอบดูละครและกีฬา 36 คน ชอบดูทั้งสามรายการ 16 คน อยากทราบว่า ถ้ามีคนไม่ชอบรายการใดเลย 12 คน จะมีผู้ที่ชอบรายการข่าวและรายการกีฬากี่คน

**วิธีทำ** สมมติว่าเซตของคนชอบดูรายการข่าวเป็น  $A$  ชอบดูละครเป็น  $B$  ชอบดูรายการกีฬาเป็น  $C$  พิจารณา

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(U) - 12 \\ &= 200 - 12 \\ &= 188 \end{aligned}$$

จากคุณสมบัติ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(A \cap C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &\quad - n(A \cup B \cup C) \\ &= 104 + 106 + 62 - 45 - 36 + 16 - 188 \\ &= 19 \end{aligned}$$

ดังนั้น มีผู้ที่ชอบรายการข่าวและรายการกีฬาทั้งสิ้น 19 คน

**ตัวอย่างที่ 1.28** ในการสอบของนักเรียนชั้นหนึ่งพบว่า มีผู้สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ 37 คน วิชาสังคมศึกษา 48 คน วิชาภาษาไทย 45 คน มีผู้ที่สอบผ่านทั้งวิชาคณิตศาสตร์และสังคมศึกษา 15 คน ทั้งสังคมศึกษาและภาษาไทย 13 คน ทั้งคณิตศาสตร์และภาษาไทย 7 คน และมีผู้ที่สอบผ่านทั้งสามวิชาเพียง 5 คน ถามว่าที่กล่าวมานี้นักเรียนอยู่ทั้งหมดจำนวนเท่าใด

**วิธีทำ** สมมติว่าเซตของคนที่สอบผ่านคณิตศาสตร์เป็น  $M$  สอบผ่านสังคมศึกษาเป็น  $S$  และสอบผ่านภาษาไทยเป็น  $T$

ข้อมูลที่โจทย์ให้มาได้แก่  $n(M) = 37$  ,  $n(S) = 48$  ,  $n(T) = 45$ ,  $n(M \cap S) = 15$  ,  $n(S \cap T) = 13$  ,  $n(M \cap T) = 7$  และ  $n(M \cap S \cap T) = 5$  ดังนั้น เราหา  $n(M \cup S \cup T)$  ได้จาก

$$\begin{aligned} n(M \cup S \cup T) &= n(M) + n(S) + n(T) - n(M \cap S) - n(S \cap T) - n(M \cap T) \\ &\quad + n(M \cap S \cap T) \\ &= 37 + 48 + 45 - 15 - 13 - 7 + 5 \\ &= 100 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนนักเรียนทั้งหมดในชั้นเท่ากับ 100 คน

จากที่กล่าวมาทั้งหมดนั้นสิ่งสำคัญคือ เราศึกษากลุ่มหรือสิ่งที่เราสนใจ โดยพิจารณาว่าเมื่อนำกลุ่มหรือเซตที่เราสนใจนั้นมารวมหรือนับสิ่งที่เหมือนกันจะทำได้อย่างไร เมื่อเราสร้างวิธีการร่วมกันจึงเรียกการดำเนินการเหล่านั้นว่า ผลบวก และผลตัดตามลำดับ เป็นพื้นฐานการสร้างการดำเนินการอื่นๆ ที่เราสนใจ นอกจากนี้สิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งของการศึกษาเรื่องเซต คือ จำนวนสมาชิกในเซตรวมไปถึงคุณสมบัติต่างๆที่เกิดขึ้นตามมาจากการศึกษาดังกล่าว

เซตเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูง อีกทั้งยังสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์บางปัญหาที่ยุ่งยากได้อย่างง่ายดาย เป็นจุดเริ่มต้นในการเรียนรู้การดำเนินการที่แตกต่างจากสิ่งที่เคยเรียนผ่านมาในคณิตศาสตร์เบื้องต้นที่มีแค่การบวกและคูณจำนวนจริง นำไปสู่การดำเนินการ ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ ผลต่าง เป็นต้น เราสามารถใช้ความรู้เรื่องเซตเพิ่มความรัดกุมให้กับคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ โดยเฉพาะเซตอนันต์ ที่ถูกนำไปเพิ่มความรัดกุมให้กับทฤษฎีทางคณิตศาสตร์อย่างมากมาย ดังนั้นการศึกษาเรื่องเซตจึงเป็นพื้นฐานของการเรียนคณิตศาสตร์นำไปสู่การตีกรอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับสูงต่อไป

## แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
  - 1.1 เซตของประเทศที่มีพรมแดนติดกับประเทศไทย
  - 1.2 เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วย ส
  - 1.3 เซตของสระในภาษาอังกฤษ
  - 1.4 เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีสองหลัก
  - 1.5 เซตของจำนวนคี่น้อยกว่า 9
  - 1.6 เซตของพยัญชนะในภาษาไทย
  - 1.7 เซตของจำนวนนับที่สอดคล้องกับสมการ  $x^2 - 4x = 0$
2. จงเขียนเซตแต่ละข้อต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต
  - 2.1  $A = \{2, 3, 5\}$
  - 2.2  $B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
  - 2.3  $C = \{\dots, -6, -4, -2\}$
  - 2.4  $D = \{1, 4, 9, \dots, 100\}$
  - 2.5  $E = \{a, e, i, o, u\}$
  - 2.6  $F = \{2, 5\}$
  - 2.7  $G = \{\}$
3. จงบอกจำนวนสมาชิกของเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้
  - 3.1  $A = \{1, 234\}$
  - 3.2  $B = \{a, b, c, d, efg, hijk, lmno\}$
  - 3.3  $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 5 และ 25}\}$
  - 3.4  $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกและน้อยกว่า 25}\}$
4. จงพิจารณาว่าเซตในแต่ละข้อที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นเซตจำกัด หรือ เซตอนันต์
  - 4.1  $\{1, 2, 3\}$

$$4.2 \{ก, ข, ค, \dots, อ, ฮ\}$$

$$4.3 \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มลบ}\}$$

$$4.4 \text{ เซตของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน}$$

$$4.5 \text{ เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 10}$$

$$4.6 \{x \mid x \in I \text{ และ } x < 4\}$$

$$4.7 \{x \mid x \in R \text{ และ } 1 < x < 2\}$$

5. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้ เป็นเซตว่างหรือไม่

$$5.1 \{\emptyset\}$$

$$5.2 \{x \mid x \neq x\}$$

$$5.3 \{x \mid x^2 = -1\}$$

$$5.4 \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ และ } x + x = x^2\}$$

$$5.5 \text{ เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 0}$$

$$5.6 \text{ เซตของจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1}$$

$$5.7 \{0\}$$

$$5.8 \text{ เซตของเดือนที่มี 27 วัน}$$

$$5.9 \{x \mid x \in \text{และ } x < 1\}$$

6. จงหาสับเซตทั้งหมดของเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$6.1 A = \{1\}$$

$$6.2 B = \{a, b\}$$

$$6.3 C = \{1, 2, 3\}$$

$$6.4 D = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$6.5 E = \{\{1, \{1\}\}\}$$

$$6.6 F = \{a, \{a, b\}\}$$

$$6.7 H = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$6.8 I = \{\}$$

7. จงพิจารณาว่าข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ถูกหรือผิด

- 7.1 ถ้า  $A$  เป็นสับเซตของ  $B$  แล้ว  $A$  เป็นสับเซตแท้ของ  $B$
- 7.2 ถ้า  $A$  เป็นเซตใดๆ แล้ว  $A$  จะมีสับเซตแท้เสมอ
- 7.3 สับเซตของเซตจำกัดเป็นเซตจำกัด
- 7.4 สับเซตของเซตอนันต์เป็นเซตอนันต์
- 7.5 ถ้า  $A$  เป็นอนันต์แล้ว  $A$  มีสับเซตแท้เสมอ
8. กำหนด  $A = \{a, b\}$  และ  $B = \{a, b, c, d\}$  ถ้า  $A \subset X \subset B$  จงหาเซต  $X$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
9. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมี 100 คน เล่นฟุตบอล 20 คน เล่นวอลเลย์บอล 15 คน ในจำนวนนี้เล่นทั้งฟุตบอล และวอลเลย์บอล 10 คน จงหา
  - 9.1 จำนวนนักเรียนที่เล่นกีฬาเพียงอย่างเดียว
  - 9.2 จำนวนนักเรียนที่ไม่เล่นกีฬาทั้งสองอย่าง
10. ในโรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชาย 40 คน ปรากฏว่า 8 คนไม่เล่นกีฬาชนิดใดเลย แต่ 25 คนเล่นฟุตบอลและ 20 คนเล่นวอลเลย์บอล จงหาว่า มีเด็กที่เล่นฟุตบอลอย่างเดียวกี่คน
11. จากการสอบถามพ่อบ้านพบว่า มีผู้ที่ดื่มชาหรือกาแฟเป็นประจำจำนวน 120 คน มีผู้ที่ชอบดื่มชา 60 คน ชอบดื่มกาแฟ 70 คน จงหา
  - 11.1 จำนวนพ่อบ้านที่ชอบดื่มทั้งชาและกาแฟ
  - 11.2 จำนวนพ่อบ้านที่ชอบดื่มเพียงอย่างเดียว
12. จากการสัมภาษณ์นักศึกษาที่ชอบฟังเพลง จำนวน 75 คน พบว่า ชอบเพลงไทยเดิม 42 คน ชอบเพลงลูกทุ่ง 34 คน ชอบเพลงไทยสากล 27 คน ชอบทั้งเพลงไทยเดิมและไทยสากล 12 คน ชอบทั้งเพลงไทยเดิมและเพลงลูกทุ่ง 14 คน ชอบเพลงลูกทุ่ง และเพลงไทยสากล 10 คน ชอบเพลงทั้งสามประเภท 7 คน จงหานักศึกษาที่ชอบเพลงประเภทเดียว
13. จากการสำรวจครอบครัวจำนวน 50 ครอบครัวพบว่า มีครอบครัวที่ประกอบอาชีพค้าขาย 2 ครอบครัวนอกนั้นประกอบอาชีพอย่างน้อยหนึ่งอย่างดังนี้ ปลูเงาะ 30 ครอบครัว ปลู่มังคุด 32 ครอบครัว ปลูทุเรียน 33 ครอบครัว ปลูเงาะและปลู่มังคุด 15 ครอบครัว ปลู่มังคุดและทุเรียน 20 ครอบครัว ปลูเงาะและทุเรียน 17 ครอบครัว มีกี่ครอบครัวที่ปลูกพืชเพียงชนิดเดียว
14. หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีครอบครัวทั้งหมด 800 ครอบครัว ประกอบอาชีพค้าขายอย่างเดียว 10 ครอบครัว นอกนั้นทำสวนเงาะ มังคุด ทุเรียน จากการสำรวจเฉพาะชาวสวนพบว่า มีครอบครัวที่ปลูกผลไม้

ตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไป 110 ครอบครัว ปลูเงาะและมังคุด 70 ครอบครัว ปลูเงาะและทุเรียน 60  
ครอบครัว ปลูมังคุดและทุเรียน 50 ครอบครัว ไม่ปลูมังคุดเลย 290 ครอบครัว จงหาจำนวน  
ครอบครัวที่ปลูแต่มังคุดเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

## เอกสารอ้างอิง

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัณจิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. (2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ประเสริฐ ภูเงิน และคณะ. (2550). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. บุรีรัมย์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏ บุรีรัมย์
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. (2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจิตตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว
- ยุวณิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ**. เชียงใหม่ : สถาบัน ราชภัฏเชียงใหม่
- สุนทร แสงผล และ ก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพฯ : สำนัก พิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

### เนื้อหาประจำบท

1. ประพจน์
2. ตัวเชื่อมประพจน์
3. ตารางค่าความจริง
4. การสมมูล
5. การอ้างเหตุผล
6. ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ
7. การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. จำแนกได้ว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นประพจน์หรือไม่เป็นประพจน์
2. เปลี่ยนประโยคเปิดให้เป็นประพจน์ได้
3. เปลี่ยนประโยคทั่วไปให้เป็นประโยคตรรกวิทยาได้
4. อธิบายความแตกต่างระหว่างการให้เหตุผลแบบนิรนัยกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยได้
5. ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลโดยใช้แผนภาพและตารางได้
6. บอกความหมายของการสมมูลของประพจน์
7. ตรวจสอบความเป็นสัจนิรันดร์ได้

### วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
  - 1.1 ประพจน์
  - 1.2 ตัวเชื่อมประพจน์
  - 1.3 ตารางค่าความจริง
  - 1.4 การสมมูล
  - 1.5 การอ้างเหตุผล
  - 1.6 ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ
  - 1.7 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
  - 2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์ เช่น อินเทอร์เน็ตเรื่องวิธีการเขียนเซต
  - 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

### สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ
2. Slide Presentation

### การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก การโต้ตอบและการซักถาม
2. แบบทดสอบ
3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

## บทที่ 2

### ตรรกศาสตร์

คำว่า ตรรกศาสตร์ (Logic) ได้มาจากคำศัพท์ภาษาสันสกฤตสองศัพท์ คือ ตรรก และศาสตร์ คำว่าตรรก หมายถึง การตรึกตรอง ความคิด ความนึกคิด และคำว่า ศาสตร์ หมายถึง วิชา ตำรา เมื่อนำมารวมกันเป็น ตรรกศาสตร์ จึงหมายถึง วิชาว่าด้วยความนึกคิดอย่างเป็นระบบ ปรากฏทั่วไปจึงมีความเห็นร่วมกันว่า ตรรกศาสตร์ คือ วิชาว่าด้วย การใช้กฎเกณฑ์ การใช้เหตุผล ซึ่งเป็นวิชาพื้นฐานของวิชาทางด้านวิทยาศาสตร์เพราะต้องการความเป็นเหตุเป็นผลโดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งความเข้าใจในตรรกศาสตร์เบื้องต้นจะช่วยให้ศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ได้อย่างมีเหตุผล และเป็นพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

#### 2.1 ประพจน์(Proposition or Statement)

ประพจน์ คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เช่น ข้าวเป็นอาหารหลักของคนไทย ประเทศไทยอยู่ในทวีปอเมริกา เป็นต้น ข้อความที่ไม่เป็นประพจน์ คือข้อความที่ไม่สามารถบอกค่าความจริงได้ เช่น ข้อความที่อยู่ในรูป ประโยคคำถาม อ้อนวอน ขอร้อง คำสั่ง เช่น ได้โปรดเปิดทีวีรัก กรุณาอย่าส่งเสียงดัง จงนั่งลงเดี๋ยวนี้ เป็นต้น นอกจากนี้ประพจน์ยังสามารถจำแนกออกเป็นสองแบบ คือ ประพจน์เดี่ยว ซึ่งหมายถึง ประพจน์ที่ไม่มีตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์รวมอยู่ด้วย และ ประพจน์ผสม ซึ่งหมายถึง ประพจน์ที่ได้จากการนำประพจน์เดี่ยวตั้งแต่สองประพจน์ขึ้นไป มาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ สำหรับบทนี้ผู้เขียนขอใช้สัญลักษณ์แทนประพจน์ต่างๆ เป็นตัวอักษรตัวเล็ก เช่น  $p$  หรือ  $q$  โดยแต่ละประพจน์จะมีค่า ความจริงที่เป็นไปได้ 2 แบบเท่านั้น คือเป็น จริง (True: T) หรือเป็น เท็จ (False: F) แทนด้วยสัญลักษณ์  $p \equiv T$  หมายถึง ประพจน์  $p$  มีค่าความจริงเป็นจริง นอกจากนี้ตั้งแต่ต้นไปหากพูดถึงประโยค ให้หมายถึงประโยคที่บอกค่าความจริงได้

#### 2.2 ตัวเชื่อมประพจน์

ในชีวิตประจำวันรวมทั้งในวิชาคณิตศาสตร์ เรามักพบการเชื่อมประโยค ด้วย ตัวเชื่อม ไม่ว่าจะเป็น ตัวเชื่อมและ ตัวเชื่อมหรือ ตัวเชื่อมถ้า-แล้ว ตัวเชื่อมก็ต่อเมื่อ และการเติมคำว่า ไม่ ด้านหน้าประโยค ซึ่งการเชื่อมแต่ละแบบ ส่งผลต่อค่าความจริงของประโยคผสม ซึ่งแบ่งตัวเชื่อมเป็น 4 ตัวเชื่อม และ 1 ตัวดำเนินการ ดังนี้

### 2.2.1 ตัวเชื่อม และ

สำหรับประพจน์  $p$  และ  $q$  ใดๆ สามารถนำมาเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม และ แทนด้วยสัญลักษณ์  $p \wedge q$  ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่ามีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่จะทำให้ประโยคเป็นจริง คือทั้งสองประพจน์เดี่ยวต้องเป็นจริงทั้งคู่

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| $T$ | $T$ | $T$          |
| $T$ | $F$ | $F$          |
| $F$ | $T$ | $F$          |
| $F$ | $F$ | $F$          |

### 2.2.2 ตัวเชื่อม หรือ

สำหรับประพจน์  $p$  และ  $q$  ใดๆ สามารถนำมาเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม หรือ แทนด้วยสัญลักษณ์  $p \vee q$  ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่ามีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่จะทำให้ประโยคเป็นเท็จ คือทั้งสองประพจน์เดี่ยวต้องเป็นเท็จทั้งคู่

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| $T$ | $T$ | $T$        |
| $T$ | $F$ | $T$        |
| $F$ | $T$ | $T$        |
| $F$ | $F$ | $F$        |

### 2.2.3 ตัวเชื่อม ถ้า-แล้ว

สำหรับประพจน์  $p$  และ  $q$  ใดๆ สามารถนำมาเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม ถ้า-แล้ว แทนด้วยสัญลักษณ์  $p \rightarrow q$  ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่ามีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่จะทำให้ประโยคเป็นเท็จ คือประพจน์หน้าต้องเป็นจริงและประพจน์หลังเป็นเท็จ

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| $T$ | $T$ | $T$               |
| $T$ | $F$ | $F$               |
| $F$ | $T$ | $T$               |
| $F$ | $F$ | $T$               |

### 2.2.4 ตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ

สำหรับประพจน์  $p$  และ  $q$  ใดๆ สามารถนำมาเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ แทนด้วยสัญลักษณ์  $p \leftrightarrow q$  ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่าหากทั้งสองพจน์มีค่าความจริงเหมือนกันจะให้ค่าความจริงเป็นจริง แต่ถ้าทั้งสองประพจน์มีค่าความจริงต่างกันจะให้ค่าความจริงเป็นเท็จ

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| $T$ | $T$ | $T$                   |
| $T$ | $F$ | $F$                   |
| $F$ | $T$ | $F$                   |
| $F$ | $F$ | $T$                   |

### 2.2.5 นิเสธ

สำหรับประพจน์  $p$  ใดๆ สามารถนำมาเขียน นิเสธ ไว้หน้าประพจน์ แทนด้วยสัญลักษณ์  $\sim p$  ให้ค่าความจริงตรงข้ามกับ  $p$  ดังตาราง

| $p$ | $\sim p$ |
|-----|----------|
| $T$ | $F$      |
| $F$ | $T$      |

**ตัวอย่างที่ 2.1** กำหนดให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง  $r$  เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ  $[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 [(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r &\equiv [(T \wedge F) \vee T] \rightarrow F \\
 &\equiv (F \vee T) \rightarrow F \\
 &\equiv T \rightarrow F \\
 &\equiv F
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

**ตัวอย่างที่ 2.2** กำหนดให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง  $r$  และ  $s$  เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ  $[(p \leftrightarrow r) \vee s] \rightarrow [(r \wedge q) \rightarrow s]$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 [(p \leftrightarrow r) \vee s] \rightarrow [(r \wedge q) \rightarrow s] &\equiv [(T \leftrightarrow F) \vee F] \rightarrow [(F \wedge T) \rightarrow F] \\
 &\equiv (F \vee F) \rightarrow (F \rightarrow F) \\
 &\equiv F \rightarrow T \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $[(p \leftrightarrow r) \vee s] \rightarrow [(r \wedge q) \rightarrow s]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

**ตัวอย่างที่ 2.3** กำหนดให้  $p, q$  และ  $r$  เป็นประพจน์ ถ้าประพจน์  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้วหาค่าความจริงของประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $p \wedge \sim q$
2.  $p \vee \sim q$
3.  $(p \wedge q) \rightarrow r$
4.  $q \rightarrow (p \wedge r)$

วิธีทำ จากแนวคิด  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แสดงว่า  $p \rightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นจริง .....(1)

และ  $p \leftrightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ .....(2)

จาก (2) สรุปได้ว่า  $p$  กับ  $q$  มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

นั่นคือ ค่าความจริงของ  $p, q$  ที่เป็นไปได้มีดังนี้

กรณีที่ 1  $p \equiv T, q \equiv F$

กรณีที่ 2  $p \equiv F, q \equiv T$

แต่ค่าความจริงของ  $p, q$  ในกรณีที่ 1 ขัดแย้งกับ (1)

ดังนั้น กรณีที่ 1 จึงใช้ไม่ได้ สรุปค่าความจริงของ  $p, q$  เป็นไปตามกรณีที่ 2 คือ

$p \equiv F, q \equiv T$  พิจารณาแต่ละข้อ ดังนี้

ข้อที่ 1  $p \wedge \sim q \equiv F \vee \sim T \equiv F$

$$\text{ข้อที่ 2 } p \vee \sim q \equiv F \vee \sim T \equiv F \vee F \equiv F$$

$$\text{ข้อที่ 3 } (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (F \wedge T) \rightarrow r \equiv F \rightarrow r \equiv T$$

$$\text{ข้อที่ 4 } q \rightarrow (p \wedge r) \equiv T \rightarrow (F \wedge r) \equiv T \rightarrow F \equiv F$$

**ตัวอย่างที่ 2.4** ให้  $p, q, r, x$  และ  $y$  เป็นประพจน์ ซึ่ง  $p \rightarrow (q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ  $(x \vee y) \leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. (p \wedge r) \leftrightarrow (y \vee q)$$

$$2. (x \wedge y) \rightarrow (p \wedge q)$$

$$3. x \leftrightarrow (q \wedge r)$$

$$4. (q \vee r) \rightarrow ((x \wedge y) \rightarrow p)$$

**วิธีทำ** จากที่กำหนดให้  $p \rightarrow (q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จะได้  $p$  มีค่าความจริงเป็นจริง

และได้  $(q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ทำให้  $\sim (q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง

เนื่องจาก  $\sim (q \wedge r)$  สมมูลกับ  $\sim q \vee \sim r$

จึงได้  $\sim q \vee \sim r$  มีค่าความจริงเป็นจริง

และจากที่กำหนดให้  $(x \vee y) \leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ทำให้ได้ว่า  $x \vee y$  มีค่าความจริงเป็นจริง

สรุปค่าความจริงของแต่ละประพจน์ที่หาได้ดังนี้  $p, x \vee y, q \wedge r$  มีค่าความจริงเป็นจริง ,

จริง , เท็จ ตามลำดับ

พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ในตัวเลือกแต่ละข้อ ดังนี้

$$\text{ข้อ 1 } (p \wedge r) \rightarrow (y \vee q)$$

$T$

พบว่าไม่สามารถสรุปค่าความจริงของ  $(p \wedge r) \rightarrow (y \vee q)$  ได้

$$\text{ข้อ 2 } (x \wedge y) \rightarrow (p \wedge q)$$

$T$

พบว่าไม่สามารถสรุปค่าความจริงของ  $(x \wedge y) \rightarrow (p \wedge q)$  ได้

$$\text{ข้อ 3 } x \leftrightarrow (q \wedge r)$$

$F$

พบว่าไม่สามารถสรุปค่าความจริงของ  $x \leftrightarrow (q \wedge r)$  ได้

$$\text{ข้อ 4 } (q \vee r) \rightarrow ((x \wedge y) \rightarrow p) \text{ พบว่า } (q \vee r) \rightarrow ((x \wedge y) \rightarrow p) \text{ มีค่าความจริงเป็นจริง}$$

**ตัวอย่างที่ 2.5** กำหนดให้ ประพจน์  $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. \sim p \rightarrow (q \vee r) \quad 2. \sim p \rightarrow (q \wedge r) \quad 3. p \vee q \vee \sim r \quad 4. p \wedge q \wedge \sim r$$

วิธีทำ จาก  $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แสดงว่า  $\sim p \leftrightarrow \sim r$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ .....(1)

และ  $p \leftrightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ .....(2)

จาก (1) สรุปได้ว่า  $\sim p$  กับ  $\sim r$  มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

นั่นคือ  $p$  กับ  $r$  มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

จาก (2) สรุปได้ว่า  $p$  กับ  $q$  มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

ดังนั้น ค่าความจริงของ  $p, q, r$  ที่เป็นไปได้มีดังนี้

กรณีที่ 1  $p \equiv T, q \equiv F, r \equiv F$

กรณีที่ 2  $p \equiv F, q \equiv T, r \equiv T$

พิจารณาดังเลือกแต่ละข้อดังนี้

ข้อ 1 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

$$\sim p \rightarrow (q \vee r)$$

ข้อ 2 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

$$\sim p \rightarrow (q \wedge r)$$

ข้อ 3 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

$$p \vee (q \vee \sim r)$$

ข้อ 4 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

กรณีที่ 1

กรณีที่ 2

$$p \wedge (q \wedge \sim r)$$

$$p \wedge (q \wedge \sim r)$$

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนดให้  $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $p \vee \sim q$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข.  $p \rightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อใดบ้างกล่าวถูกต้อง

วิธีทำ จาก  $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แสดงว่า  $\sim p \rightarrow q$  กับ  $q$  มีค่าความจริงตรงกันข้าม

$$\text{และจาก } \sim p \rightarrow q \equiv \sim(\sim p) \vee q \equiv p \vee q$$

นั่นคือ  $p \vee q$  กับ  $q$  มีค่าความจริงตรงกันข้าม ซึ่งแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1  $p \vee q$  มีค่าความจริงเป็นจริง

$q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ทำให้  $p$  มีค่าความจริงเป็นจริง

กรณีที่ 2  $p \vee q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$q$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะเมื่อ  $p \vee q$  เป็นเท็จ

จะทำให้  $p$  กับ  $q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่

พิจารณาข้อ ก

$$p \wedge \sim p \equiv T \wedge \sim F \equiv T \wedge T \equiv T \therefore \text{ก ถูก}$$

พิจารณาข้อ ข

$$p \rightarrow q \equiv T \rightarrow F \equiv F \therefore \text{ข ถูก}$$

## 2.3 ตารางค่าความจริง

ตารางค่าความจริงเป็นตารางที่แสดงค่าความจริงทุกกรณีที่เป็นไปได้ในการเชื่อมประพจน์ จำนวนกรณีที่พิจารณาขึ้นอยู่กับจำนวนประพจน์ ถ้าประพจน์ผสมมีประพจน์เดียว  $n$  ประพจน์ จำนวนกรณีที่พิจารณามี  $2^n$  กรณี เราสามารถเขียนตารางค่าความจริงได้หลากหลายรูปแบบ แต่ต้องมีครบทุกกรณีไม่ว่าจะเรียงกรณีไหนขึ้นก่อนก็ตาม อย่างไรก็ตามมีวิธีการเขียนตารางค่าความจริงให้ครบทุกกรณีแบบง่ายๆ เช่น ถ้าประพจน์ผสมมีประพจน์เดียว 2 ประพจน์คือ  $p$  และ  $q$  มีกรณีที่ต้องพิจารณาทั้งหมด  $2^2 = 4$  กรณี สามารถเขียนกรณีให้ครบได้ดังนี้

| $p$ | $q$ |
|-----|-----|
| $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ |
| $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ |

จากตารางจะเห็นว่าในคอลัมน์แรกของตาราง ครึ่งหนึ่งเราแบ่งเป็นจริงและอีกครึ่งหนึ่งเป็นเท็จ ส่วนในคอลัมน์ที่สองเราแบ่งครึ่งหนึ่งของคอลัมน์แรกทำแบบนี้ต่อไปเรื่อยๆไม่ว่าจะมีกี่ประพจน์เดียวก็ตาม ซึ่งตารางต่อไปจะทำการพิจารณาประพจน์ผสมที่มีประพจน์เดียว 3 ประพจน์คือ  $p$   $q$  และ  $r$  มีกรณีที่ต้องพิจารณาทั้งหมด  $2^3 = 8$  กรณี ดังนี้

| $p$ | $q$ | $r$ |
|-----|-----|-----|
| $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

ตัวอย่างที่ 2.7 จงสร้างตารางค่าความจริงของ  $[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$

วิธีทำ

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge r$ | $(p \wedge r) \vee q$ | $[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$ |
|-----|-----|-----|--------------|-----------------------|---------------------------------------|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$          | $T$                   | $T$                                   |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$          | $T$                   | $F$                                   |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$          | $T$                   | $T$                                   |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$          | $F$                   | $T$                                   |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$          | $T$                   | $T$                                   |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$          | $T$                   | $F$                                   |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$          | $F$                   | $T$                                   |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$          | $F$                   | $T$                                   |

จากการสร้างตารางค่าความจริงทำให้เราสังเกตเห็นว่าในบางครั้ง ประพจน์สองประพจน์  
ใดๆให้ค่าความจริงที่เหมือนกันแบบกรณีต่อกรณี เช่น ประพจน์  $p \rightarrow q$  กับประพจน์  $\sim p \vee q$  ดัง  
ตาราง

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|
| $T$ | $T$ | $F$      | $T$             | $T$               |
| $T$ | $F$ | $F$      | $F$             | $F$               |
| $F$ | $T$ | $T$      | $T$             | $T$               |
| $F$ | $F$ | $T$      | $T$             | $T$               |

จากตาราง จะเห็นว่าสองคอลัมน์สุดท้ายให้ค่าความจริงเหมือนกันแบบกรณีต่อกรณี  
หากเป็นแบบนี้เราจะกล่าวว่าประพจน์  $p \rightarrow q$  กับประพจน์  $\sim p \vee q$  สมมูลกันแทนด้วยสัญลักษณ์  
 $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  หากเราสังเกตต่อไปอีก เราจะเห็นว่า เนื่องจากประพจน์ทั้งสองให้ค่าความจริงเหมือน  
กัน แบบกรณีต่อกรณี ถ้านำประพจน์ทั้งสองมาเชื่อมด้วยตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ จะทำให้เป็นจริงทุกกรณี  
ดังตัวอย่างถัดไป

**ตัวอย่างที่ 2.8** จงสร้างตารางค่าความจริงของ  $[\sim (p \wedge r) \vee q] \leftrightarrow [(p \wedge r) \rightarrow q]$

วิธีทำ

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge r$ | $\sim (p \wedge r)$ | $\sim (p \wedge r) \vee q$<br>(1) | $(p \wedge r) \rightarrow q$<br>(2) | $(1) \leftrightarrow (2)$ |
|-----|-----|-----|--------------|---------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$          | $F$                 | $T$                               | $T$                                 | $T$                       |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$          | $T$                 | $T$                               | $T$                                 | $T$                       |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$          | $F$                 | $F$                               | $F$                                 | $T$                       |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$          | $T$                 | $T$                               | $T$                                 | $T$                       |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$          | $T$                 | $T$                               | $T$                                 | $T$                       |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$          | $T$                 | $T$                               | $T$                                 | $T$                       |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$          | $T$                 | $T$                               | $T$                                 | $T$                       |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$          | $T$                 | $T$                               | $T$                                 | $T$                       |

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าคอลัมน์สุดท้ายของตารางมีค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมด เราเรียกประพจน์ที่ให้ค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมดนี้ว่า สัจนิรันดร์ นั่นหมายความว่าหากเราต้องการแสดงว่าประพจน์ผสมใดเป็นสัจนิรันดร์ ก็ต้องสร้างตารางค่าความจริงแล้วพิจารณาว่าเป็นจริงทุกกรณีหรือไม่ แต่ความเป็นจริงแล้ว ยังมีวิธีอื่นที่ช่วยตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์อีก โดยการสมมติว่าประพจน์ที่กำหนดให้เป็นเท็จแล้วหาข้อขัดแย้ง หากขัดแย้งจะสรุปได้ว่า ประพจน์ผสมนั้นเป็นสัจนิรันดร์

**ตัวอย่างที่ 2.9** จงแสดงว่า  $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$  เป็นสัจนิรันดร์

วิธีที่ 1 สมมติว่า  $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$  เป็นเท็จ เนื่องจากเป็นตัวเชื่อม ถ้า-แล้ว จึงเป็นเท็จได้กรณีเดียวคือ  $p \wedge \sim q$  เป็นจริง และ  $\sim (p \rightarrow q)$  เป็นเท็จ

จาก  $p \wedge \sim q$  เป็นจริง  
จะได้ว่า  $p$  เป็นจริง (1)

$\sim q$  เป็นจริง  
นั่นคือ  $q$  เป็นเท็จ (2)

จาก  $\sim (p \rightarrow q)$  เป็นเท็จ  
จะได้ว่า  $p \rightarrow q$  เป็นจริง (3)

จะเห็นว่า (3) ขัดแย้งกับ (1) และ (2) ดังนั้นประพจน์  $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$  เป็นสัจนิรันดร์

วิธีที่ 2 สร้างตารางค่าความจริงของประพจน์  $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$  ได้ดังนี้

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $p \rightarrow q$ | $\sim (p \rightarrow q)$ | $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$ |
|-----|-----|----------|-------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------|
| $T$ | $T$ | $F$      | $F$               | $T$               | $F$                      | $T$                                                    |
| $T$ | $F$ | $T$      | $T$               | $F$               | $T$                      | $T$                                                    |
| $F$ | $T$ | $F$      | $F$               | $T$               | $F$                      | $T$                                                    |
| $F$ | $F$ | $T$      | $F$               | $T$               | $F$                      | $T$                                                    |

ดังนั้นประพจน์  $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$  เป็นสัจนิรันดร์

## 2.4 การสมมูล

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นว่าประพจน์บางคู่ เมื่อนำมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อประพจน์ผสมที่ได้จะเป็นสัจนิรันดร์ เรากล่าวว่าทั้งสองประพจน์สมมูลกัน

### บทนิยาม 2.4.1

ประพจน์  $p$  และ  $q$  จะสมมูลกัน ก็ต่อเมื่อ ประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี แบบกรณีต่อกรณี เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $p \equiv q$

จากตารางค่าความจริงเราสามารถพิจารณาการสมมูลได้ดังนี้

|                            |                          |                                      |                                     |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| $T \wedge p \equiv p$      | $T \vee p \equiv T$      | $T \rightarrow p \equiv p$           | $T \leftrightarrow p \equiv p$      |
| $F \wedge p \equiv F$      | $F \vee p \equiv p$      | $F \rightarrow p \equiv T$           | $F \leftrightarrow p \equiv \sim p$ |
| $p \wedge p \equiv p$      | $p \vee p \equiv p$      | $p \rightarrow T \equiv T$           | $p \leftrightarrow p \equiv T$      |
| $p \wedge \sim p \equiv F$ | $p \vee \sim p \equiv T$ | $p \rightarrow F \equiv \sim p$      | $p \leftrightarrow \sim p \equiv F$ |
|                            |                          | $p \rightarrow p \equiv T$           |                                     |
|                            |                          | $p \rightarrow \sim p \equiv \sim p$ |                                     |

กฎการสมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์

กำหนดให้  $p, q$  และ  $r$  เป็นประพจน์ใดๆ

กฎนิเสธซ้อน (Double negation )

- $\sim \sim p \equiv p$

กฎการสลับที่ (Commutative Laws)

- $p \vee q \equiv q \vee p$

$$2. p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$3. p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Laws)

$$1. (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$2. (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

กฎการแจกแจง (Distributive Laws)

$$1. p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$2. p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

กฎการนิพจน์ (Idempotent Laws)

$$1. p \vee p \equiv p$$

$$2. p \wedge p \equiv p$$

กฎเอกลักษณ์ (Identity Laws)

$$1. p \vee F \equiv p$$

$$2. p \vee T \equiv T$$

$$3. p \wedge F \equiv F$$

$$4. p \wedge T \equiv p$$

กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's Laws)

$$1. \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$2. \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

กฎแย้งกลับที่ (Contrapositive)

$$1. p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

กฎนิเสธ (Implication)

$$1. p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$2. \sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

กฎการสมมูล (Equivalence)

$$1. p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

**ตัวอย่างที่ 2.10** ถ้า  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์แล้ว ประพจน์  $p \rightarrow \sim (q \rightarrow p)$  สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

$$\begin{array}{llll} 1. \sim p \vee (\sim p \wedge q) & 2. \sim p \vee (p \vee q) & 3. p \rightarrow (\sim p \vee q) & 4. p \rightarrow \sim (p \wedge q) \\ \text{วิธีทำ} & p \rightarrow \sim (q \rightarrow p) & \equiv \sim p \vee \sim (q \rightarrow p) & \\ & & \equiv \sim p \vee \sim (\sim q \vee p) & \\ & & \equiv \sim p \vee [\sim (\sim q) \wedge \sim p] & \\ & & \equiv \sim p \vee (q \wedge \sim p) & \\ & & \equiv \sim p \vee (\sim p \wedge q) & \end{array}$$

**ตัวอย่างที่ 2.11** กำหนดให้  $p, q$  และ  $r$  เป็นประพจน์ แล้วประพจน์  $\sim [(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$  สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} 1. p \wedge \sim (q \rightarrow r) & 2. \sim q \vee (\sim p \wedge r) \\ 3. \sim (p \wedge q) \wedge (q \wedge r) & 4. \sim (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r) \\ \text{วิธีทำ} & \sim [(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)] \equiv (p \wedge q) \wedge \sim (\sim q \vee r) \\ & \equiv (p \wedge q) \wedge [\sim (\sim q) \wedge \sim r] \\ & \equiv (p \wedge q) \wedge (q \wedge \sim r) \\ & \equiv p \wedge (q \wedge q) \wedge \sim r \\ & \equiv p \wedge (q \wedge \sim r) \quad (\because q \wedge q \equiv q) \\ & \equiv p \wedge \sim (q \rightarrow r) \end{array}$$

**ตัวอย่างที่ 2.12** ข้อใดไม่สมมูลกับประพจน์  $p \rightarrow (q \vee r)$

$$\begin{array}{ll} 1. (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p & 2. (p \wedge \sim q) \rightarrow r \\ 3. (p \wedge \sim r) \rightarrow q & 4. \sim p \rightarrow (\sim q \wedge \sim r) \end{array}$$

**วิธีทำ** พิจารณาตัวเลือกแต่ละข้อ ดังนี้

$$\begin{array}{l} \text{ข้อ 1 } (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p \equiv \sim (q \vee r) \rightarrow \sim p \\ \equiv p \rightarrow (q \vee r) \end{array}$$

$$\text{ข้อ 2 } (p \wedge \sim q) \rightarrow r \equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee r$$

$$\begin{aligned}
&\equiv [\sim p \vee \sim (\sim q)] \vee r \\
&\equiv \sim p \vee (q \vee r) \\
&\equiv q \rightarrow (q \vee r) \\
\text{ข้อ 3 } (p \wedge \sim r) \rightarrow q &\equiv \sim (p \wedge \sim r) \vee q \\
&\equiv [\sim p \vee \sim (\sim r) \vee q] \vee q \\
&\equiv \sim p \vee (r \vee q) \\
&\equiv p \rightarrow (q \vee r) \\
\text{ข้อ 4 } \sim p \rightarrow (\sim q \wedge \sim r) &\equiv \sim p \rightarrow \sim (q \vee r) \\
&\equiv (q \vee r) \rightarrow p \\
&\neq p \rightarrow (q \vee r)
\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 2.13** จงแสดงว่าประพจน์  $\sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee p))$  สมมูลกับประพจน์  $p \vee (\sim q) \vee r$

วิธีทำ  $\sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee p)) \equiv \sim (\sim p) \vee (q \rightarrow (r \vee p))$

$$\begin{aligned}
&\equiv p \vee (\sim q \vee (r \vee p)) \\
&\equiv (p \vee p) \vee (\sim q \vee r) \\
&\equiv p \vee (\sim q) \vee r
\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 2.14** จงแสดงว่าประพจน์  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$  สมมูลกับประพจน์  $\sim (p \wedge q) \vee r$

วิธีทำ  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (\sim p \rightarrow r) \wedge (\sim q \rightarrow r)$

$$\begin{aligned}
&\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r \\
&\equiv \sim (p \wedge q) \vee r
\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 2.15** จงแสดงว่านิเสธของประพจน์  $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow s)$  คือ

$$\begin{aligned}
&[\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim r] \wedge [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim s] \\
\text{วิธีทำ นิเสธของประพจน์ } (p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow s) &\text{ คือ} \\
&\sim [(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow s)] \equiv \sim (p \rightarrow \sim q) \vee \sim (\sim r \rightarrow s) \\
&\equiv [p \wedge \sim (\sim q)] \vee (\sim r \wedge \sim s) \\
&\equiv (p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim s) \\
&\equiv [(p \wedge q) \vee \sim r] \wedge [(p \wedge q) \vee \sim s] \\
&\equiv [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim r] \wedge [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim s]
\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 2.16** ให้  $p, q$  และ  $r$  เป็นประพจน์

ก. ถ้า  $p$  มีค่าความจริงเป็นจริง และ  $\sim q \rightarrow (\sim p \vee q)$  เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว จงหาค่าความจริงของ  $q$

ข. ถ้า  $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim (r \vee q)$  มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว จงหาค่าความจริงของ  $q$

วิธีทำ ข้อ ก. จากที่กำหนดให้  $p$  มีค่าความจริงเป็นจริง

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad \sim p \rightarrow (\sim p \vee q) &\equiv \sim (\sim q) \vee (\sim p \vee q) \\ &\equiv q \vee (\sim p \vee q) \\ &\equiv q \vee \sim p \\ &\equiv q \vee \sim T \\ &\equiv q \vee F \\ &\equiv q\end{aligned}$$

ซึ่ง  $\sim p \rightarrow (\sim p \vee q)$  เป็นสัจนิรันดร์ นั่นคือ  $q$  ต้องเป็นสัจนิรันดร์ด้วย  
ดังนั้น  $q$  มีค่าความจริงเป็นจริง

$$\begin{aligned}\text{ข้อ ข. เพราะว่า} \quad (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (r \vee q) &\equiv \sim (p \rightarrow q) \vee \sim (r \vee q) \\ &\equiv \sim (\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim q) \\ &\equiv (\sim (\sim p \wedge \sim q)) \vee (\sim r \wedge \sim q) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim q) \\ &\equiv (p \vee \sim r) \wedge \sim q\end{aligned}$$

จากที่กำหนด  $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim (r \vee q)$  มีค่าความจริงเป็นจริง

นั่นคือ  $(p \vee \sim r) \wedge \sim p$  ต้องมีค่าความจริงเป็นจริงด้วย

แสดงว่า  $p \vee \sim r$  กับ  $\sim q$  ต้องมีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่

สรุปได้ว่า  $q$  มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ

## 2.5 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล คือการกล่าวถึงข้อความที่มีเหตุเป็นข้อความ  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  ชุดหนึ่ง แล้ว ต้องการสรุปผลเป็นข้อความ  $q$  โดยพิจารณาข้อความที่กำหนดให้ว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่ การอ้างเหตุผลมีทั้งแบบที่ สมเหตุสมผล (valid) และ ไม่สมเหตุสมผล (invalid) ซึ่งเราสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลได้ คือ

### 2.5.1 วิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้สัจนิรันดร์

การอ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผล ก็ต่อเมื่อ ประโยค  $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$  เป็นสัจนิรันดร์ ซึ่งในหัวข้อการตรวจสอบสัจนิรันดร์ที่ผ่านมา ผู้เขียนใช้วิธีตรวจสอบ 2 วิธี คือ การสร้าง

ตารางค่าความจริง และ การแสดงโดยวิธีขัดแย้ง หากจะการใช้การสร้างตารางค่าความจริงตรวจสอบ ก็สามารถนำ  $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$  ไปเขียนตารางค่าความจริงได้เลย ถ้าผลออกมาเป็น สัจนิรันดร์ก็จะสามารถสรุปได้ว่าข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผล แต่ถ้าค่าความจริงที่ปรากฏไม่เป็นจริงทุกกรณีแสดงว่าข้อความที่กำหนดให้ นั้น ไม่สมเหตุสมผล ซึ่งวิธีนี้ง่ายต่อการตรวจสอบถ้าจำนวนประพจน์มีจำนวนไม่มาก ในทำนองเดียวกันมีข้อเสียที่สำคัญ คือ ต้องใช้เวลาในการตรวจสอบมากเมื่อจำนวนประพจน์มาก ยิ่งจำนวนประพจน์มากเท่าไรจำนวนกรณีก็มากตามไปด้วย

ตัวอย่างที่ 2.17 การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

|       |     |                   |
|-------|-----|-------------------|
| เหตุ  | (1) | $p \rightarrow q$ |
|       | (2) | $q \rightarrow s$ |
|       | (3) | $\sim s$          |
| <hr/> |     |                   |
| ผล    |     | $\sim p$          |
| <hr/> |     |                   |

วิธีทำ จากการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ จะต้องแสดงว่า  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \sim s] \rightarrow \sim p$  เป็นสัจนิรันดร์

| $p$ | $q$ | $s$ | $\sim p$ | $\sim s$<br>(1) | $p \rightarrow q$<br>(2) | $q \rightarrow s$<br>(3) | $(1) \wedge (2) \wedge (3)$ | $[(1) \wedge (2) \wedge (3)] \rightarrow \sim p$ |
|-----|-----|-----|----------|-----------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------|
| $T$ | $T$ | $T$ | $F$      | $F$             | $T$                      | $T$                      | $F$                         | $T$                                              |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$      | $T$             | $T$                      | $F$                      | $F$                         | $T$                                              |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$      | $F$             | $F$                      | $T$                      | $F$                         | $T$                                              |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$      | $T$             | $F$                      | $T$                      | $F$                         | $T$                                              |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$      | $F$             | $T$                      | $T$                      | $F$                         | $T$                                              |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$      | $T$             | $T$                      | $F$                      | $F$                         | $T$                                              |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$      | $F$             | $T$                      | $T$                      | $F$                         | $T$                                              |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$      | $T$             | $T$                      | $T$                      | $T$                         | $T$                                              |

จากตารางจะเห็นว่า  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \sim s] \rightarrow \sim p$  เป็นสัจนิรันดร์ นั่นคือ การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล ในทางกลับกันหากมีเพียงกรณีใดกรณีหนึ่งในตารางเป็นเท็จ จะส่งผลให้การอ้างเหตุผลไม่สมเหตุสมผล

จากตัวอย่างที่ผ่านมาทำให้เราทราบว่าเราสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้ตารางค่าความจริงได้ นอกจากนี้เรายังมีอีก 1 วิธีในการตรวจสอบสัจนิรันดร์ นั่นคือ สมมติว่า  $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$  เป็นเท็จ แล้วหาข้อขัดแย้ง จากที่สมมติว่าทั้งข้อความที่เป็นเท็จเราจะได้ว่า  $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$  เป็นจริง และ  $q$  เป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 2.18 การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

|       |     |                   |
|-------|-----|-------------------|
| เหตุ  | (1) | $p \rightarrow q$ |
|       | (2) | $q \rightarrow s$ |
|       | (3) | $\sim s$          |
| <hr/> |     |                   |
| ผล    |     | $\sim p$          |
| <hr/> |     |                   |

วิธีทำ สมมติว่า เหตุเป็นจริงและผลเป็นเท็จ ดังนี้

|       |     |                   |     |
|-------|-----|-------------------|-----|
| เหตุ  | (1) | $p \rightarrow q$ | $T$ |
|       | (2) | $q \rightarrow s$ | $T$ |
|       | (3) | $\sim s$          | $T$ |
| <hr/> |     |                   |     |
| ผล    |     | $\sim p$          | $F$ |
| <hr/> |     |                   |     |

|                                  |          |          |        |
|----------------------------------|----------|----------|--------|
| จากเหตุข้อ (3)                   | $\sim s$ | เป็นจริง |        |
| จะได้ว่า                         | $s$      | เป็นเท็จ | (*)    |
| จากเหตุข้อ (2) และ (*) จะได้ว่า  | $q$      | เป็นเท็จ | (**)   |
| จากเหตุข้อ (1) และ (**) จะได้ว่า | $p$      | เป็นเท็จ | (***)  |
| จากผล                            | $\sim p$ | เป็นเท็จ |        |
| จะได้ว่า                         | $p$      | เป็นจริง | (****) |

จะเห็นว่า (\*\*\*) และ (\*\*\*\*) ขัดแย้งกัน จึงกล่าวได้ว่าประพจน์ผสมที่พิจารณาเป็นสัจนิรันดร์ นั่นคือ การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผล

### 2.5.2 การพิสูจน์ความสมเหตุสมผล

จากหัวข้อที่ผ่านมาทำให้เรารู้ถึงวิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผล นอกจากการตรวจสอบแล้วเรายังมีวิธีการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลด้วย โดยใช้การสมมูลและกฎเกณฑ์ต่างๆ ดังนี้

## 1. กฎ Modus Ponens (MP.)

|       |     |                   |
|-------|-----|-------------------|
| เหตุ  | (1) | $p \rightarrow q$ |
|       | (2) | $p$               |
| <hr/> |     |                   |
| ผล    |     | $q$               |
| <hr/> |     |                   |

## 2. กฎ Modus Tollens (MT.)

|       |     |                   |
|-------|-----|-------------------|
| เหตุ  | (1) | $p \rightarrow q$ |
|       | (2) | $\sim q$          |
| <hr/> |     |                   |
| ผล    |     | $\sim p$          |
| <hr/> |     |                   |

## 3. กฎ Conjunction (Conj.)

|       |     |              |
|-------|-----|--------------|
| เหตุ  | (1) | $p$          |
|       | (2) | $q$          |
| <hr/> |     |              |
| ผล    |     | $p \wedge q$ |
| <hr/> |     |              |

## 4. กฎ Simplification (sim.)

|       |     |              |
|-------|-----|--------------|
| เหตุ  | (1) | $p \wedge q$ |
| ผล    |     | $p$          |
| <hr/> |     |              |

## 5. กฎ Addition (Add.)

|       |     |            |
|-------|-----|------------|
| เหตุ  | (1) | $p$        |
| ผล    |     | $p \vee q$ |
| <hr/> |     |            |

## 6. กฎ Disjunctive Syllogism (DS.)

|       |     |            |
|-------|-----|------------|
| เหตุ  | (1) | $p \vee q$ |
|       | (2) | $\sim p$   |
| <hr/> |     |            |
| ผล    |     | $q$        |
| <hr/> |     |            |

ตัวอย่างที่ 2.19 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

|       |     |                   |
|-------|-----|-------------------|
| เหตุ  | (1) | $p \rightarrow q$ |
|       | (2) | $q \rightarrow s$ |
|       | (3) | $\sim s$          |
| <hr/> |     |                   |
| ผล    |     | $\sim p$          |
| <hr/> |     |                   |

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

|       |     |                   |                         |
|-------|-----|-------------------|-------------------------|
|       | (1) | $p \rightarrow q$ | เหตุ                    |
|       | (2) | $q \rightarrow s$ | เหตุ                    |
|       | (3) | $\sim s$          | เหตุ                    |
|       | (4) | $\sim q$          | ข้อ(2) ข้อ(3) และกฎ MT. |
| <hr/> |     |                   |                         |
| ผล    | (5) | $\sim p$          | ข้อ(1) ข้อ(4) และกฎ MT. |
| <hr/> |     |                   |                         |

ตัวอย่างที่ 2.20 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

|       |     |                                 |
|-------|-----|---------------------------------|
| เหตุ  | (1) | $(\sim p \vee q) \rightarrow r$ |
|       | (2) | $r \rightarrow s$               |
|       | (3) | $\sim s$                        |
| <hr/> |     |                                 |
| ผล    |     | $p \vee w$                      |
| <hr/> |     |                                 |

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

|       |     |                                 |                         |
|-------|-----|---------------------------------|-------------------------|
|       | (1) | $(\sim p \vee q) \rightarrow r$ | เหตุ                    |
|       | (2) | $r \rightarrow s$               | เหตุ                    |
|       | (3) | $\sim s$                        | เหตุ                    |
|       | (4) | $\sim r$                        | ข้อ(2) ข้อ(3) และกฎ MT. |
|       | (5) | $\sim (\sim p \vee q)$          | ข้อ(1) ข้อ(4) และกฎ MT. |
|       | (6) | $(p \wedge \sim q)$             | ข้อ(5) และ การสมมูล     |
|       | (7) | $p$                             | ข้อ(6) และ กฎ Sim.      |
| <hr/> |     |                                 |                         |
| ผล    | (8) | $p \vee w$                      | ข้อ(7) และ กฎ Add.      |
| <hr/> |     |                                 |                         |

ตัวอย่างที่ 2.21 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

|       |     |                                            |
|-------|-----|--------------------------------------------|
| เหตุ  | (1) | $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge \sim s)$ |
|       | (2) | $\sim r \vee s$                            |
|       | (3) | $s \vee q \rightarrow p$                   |
| <hr/> |     |                                            |
| ผล    |     | $\sim p$                                   |
| <hr/> |     |                                            |

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

|       |     |                                            |                         |
|-------|-----|--------------------------------------------|-------------------------|
|       | (1) | $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge \sim s)$ | เหตุ                    |
|       | (2) | $\sim r \vee s$                            | เหตุ                    |
|       | (3) | $s \vee q \rightarrow p$                   | เหตุ                    |
|       | (4) | $\sim (r \wedge \sim s)$                   | ข้อ(2) และการสมมูล      |
|       | (5) | $\sim (p \vee q)$                          | ข้อ(1) ข้อ(4) และกฎ MT. |
|       | (6) | $\sim p \wedge \sim q$                     | ข้อ(5) และ การสมมูล     |
| ผล    | (7) | $\sim p$                                   | ข้อ(6) และ กฎ Sim.      |
| <hr/> |     |                                            |                         |

ตัวอย่างที่ 2.22 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

|       |     |                                   |
|-------|-----|-----------------------------------|
| เหตุ  | (1) | $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ |
|       | (2) | $s \rightarrow p$                 |
|       | (3) | $q \rightarrow \sim u$            |
|       | (4) | $u \wedge s$                      |
| <hr/> |     |                                   |
| ผล    |     | $r$                               |
| <hr/> |     |                                   |

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

|    |      |                                   |                           |
|----|------|-----------------------------------|---------------------------|
|    | (1)  | $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ | เหตุ                      |
|    | (2)  | $s \rightarrow p$                 | เหตุ                      |
|    | (3)  | $q \rightarrow \sim u$            | เหตุ                      |
|    | (4)  | $u \wedge s$                      | เหตุ                      |
|    | (5)  | $u$                               | ข้อ(4) และกฎ Sim.         |
|    | (6)  | $s$                               | ข้อ(4) และกฎ Sim.         |
|    | (7)  | $\sim q$                          | ข้อ(3) ข้อ(5) และกฎ MT.   |
|    | (8)  | $p$                               | ข้อ(2) ข้อ(6) และกฎ MP.   |
|    | (9)  | $p \wedge \sim q$                 | ข้อ(7) ข้อ(8) และการสมมูล |
| ผล | (10) | $r$                               | ข้อ(1) ข้อ(9) และ กฎ MP.  |

ตัวอย่างที่ 2.23 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

|      |     |                            |
|------|-----|----------------------------|
| เหตุ | (1) | $p \rightarrow q$          |
|      | (2) | $r \rightarrow q$          |
| ผล   |     | $(p \vee r) \rightarrow q$ |

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

|    |     |                                          |                            |
|----|-----|------------------------------------------|----------------------------|
|    | (1) | $p \rightarrow q$                        | เหตุ                       |
|    | (2) | $r \rightarrow q$                        | เหตุ                       |
|    | (3) | $\sim p \vee q$                          | ข้อ(1) และการสมมูล         |
|    | (4) | $\sim r \vee q$                          | ข้อ(2) และการสมมูล         |
|    | (5) | $(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \vee q)$ | ข้อ(3) ข้อ(4) และประโยครวม |
|    | (6) | $(\sim p \wedge \sim r) \vee q$          | ข้อ(5) และการสมมูล         |
|    | (7) | $\sim (p \vee r) \vee q$                 | ข้อ(6) และการสมมูล         |
| ผล | (8) | $(p \vee r) \rightarrow q$               | ข้อ(7) และการสมมูล         |

ตัวอย่างที่ 2.24 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

|       |     |                            |
|-------|-----|----------------------------|
| เหตุ  | (1) | $(p \vee r) \rightarrow q$ |
|       | (2) | $s \rightarrow p$          |
|       | (3) | $s \wedge w$               |
| <hr/> |     |                            |
| ผล    |     | $q$                        |
| <hr/> |     |                            |

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

|       |     |                            |                         |
|-------|-----|----------------------------|-------------------------|
|       | (1) | $(p \vee r) \rightarrow q$ | เหตุ                    |
|       | (2) | $s \rightarrow p$          | เหตุ                    |
|       | (3) | $s \wedge w$               | เหตุ                    |
|       | (4) | $s$                        | ข้อ(3) และกฎ Sim.       |
|       | (5) | $p$                        | ข้อ(2) ข้อ(4) และกฎ MP. |
|       | (6) | $p \vee r$                 | ข้อ(5) และกฎ Add.       |
| ผล    | (7) | $q$                        | ข้อ(1) ข้อ(6) และกฎ MP. |
| <hr/> |     |                            |                         |

ตัวอย่างที่ 2.25 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

|       |     |                                   |
|-------|-----|-----------------------------------|
| เหตุ  | (1) | $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ |
|       | (2) | $\sim p \wedge s$                 |
| <hr/> |     |                                   |
| ผล    |     | $r \vee w$                        |
| <hr/> |     |                                   |

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

|       |     |                                   |                         |
|-------|-----|-----------------------------------|-------------------------|
|       | (1) | $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ | เหตุ                    |
|       | (2) | $\sim p \wedge s$                 | เหตุ                    |
|       | (3) | $\sim p$                          | ข้อ(2) และกฎ Sim.       |
|       | (4) | $q \wedge r$                      | ข้อ(1) ข้อ(3) และกฎ MP. |
|       | (5) | $r$                               | ข้อ(4) และกฎ Sim.       |
| ผล    | (6) | $r \vee w$                        | ข้อ(5) และกฎ Add.       |
| <hr/> |     |                                   |                         |

## 2.6 ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

ประโยค  $x + 2 = 5$  ไม่ใช่ประพจน์ เนื่องจากยังไม่ทราบแน่ชัดว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ค่าความจริงจะขึ้นอยู่กับค่าของ  $x$  ว่าเป็นจำนวนใด เช่น ถ้า  $x$  เป็น 3 ประโยคนี้อาจเป็นจริง แต่ถ้า  $x$  เป็น 2 ประโยคนี้อาจเป็นเท็จ เราเรียก ประโยคแบบนี้ว่า ประโยคเปิด (Open Sentence) ผู้เขียน

จะใช้สัญลักษณ์  $P(x), Q(x), R(x)$  แทนประโยคเปิดใดๆ ที่ติดค่าตัวแปร  $x$  ซึ่งประโยคเปิดเหล่านี้สามารถใช้ตัวเชื่อมได้เช่นเดียวกับประพจน์  $p, q, r$  ทั่วๆ ไป

ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier) คือข้อความที่ใช้บ่งบอกความมากน้อยของค่าตัวแปร  $x$  มี 2 แบบ ได้แก่ สำหรับ  $x$  ทุกตัว (For All  $x$ ;  $\forall x$ ) และ สำหรับ  $x$  บางตัว (For Some  $x$ ;  $\exists x$ ) ซึ่งตัวบ่งปริมาณทั้งสองนี้เมื่อใช้ร่วมกับเอกภพสัมพัทธ์แล้ว จะทำให้ประโยคเปิดกลายเป็นประพจน์ (คือมีค่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ) ได้ เช่น ให้  $P(x)$  แทนประโยคเปิด  $x$  มากกว่า 2 จะได้ว่า  $\forall x[P(x)]$  แทนประโยค สำหรับ  $x$  ทุกตัว  $x$  มากกว่า 2 ถ้า  $U = \{3, 4\}$  จะได้ว่า  $\forall x[P(x)]$  เป็นจริง แต่ถ้า  $U = \{1, 2\}$  จะได้ว่า  $\forall x[P(x)]$  เป็นเท็จ

### ข้อสังเกต

1. หากไม่มีการระบุเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตจำนวนจริง  $\mathbb{R}$
2. สามารถแจกแจงตัวบ่งปริมาณได้เพียงสองรูปแบบนี้เท่านั้น คือ

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)]$$

$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x[P(x)] \vee \exists x[Q(x)]$$

ประโยคเปิดที่มีสองตัวแปร เมื่อใช้ตัวบ่งปริมาณก็จะมีสองตัวเช่นกัน และการอ่านต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลัง เช่น ให้  $Q(x, y)$  แทนประโยคเปิด  $x+y$  เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า  $\forall x \exists y[Q(x, y)]$  แทนประโยค สำหรับ  $x$  ทุกตัว จะมี  $y$  บางตัวที่ทำให้  $x+y$  เป็นจำนวนเฉพาะ ส่วน  $\exists x \forall y[Q(x, y)]$  แทนประโยค มี  $x$  บางตัว ที่ทำให้  $x+y$  เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับ  $y$  ใดๆ ซึ่งสองประโยคนี้นั้นจะความหมายกัน ไม่สามารถใช้แทนกันได้

การหา นิเสธของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ นอกจากจะใส่ นิเสธที่ประโยคเปิดแล้ว ยังต้องเปลี่ยนตัวบ่งปริมาณจาก  $\forall$  เป็น  $\exists$  และจาก  $\exists$  เป็น  $\forall$  เช่น

นิเสธของ  $\forall x \exists y [P(x) \rightarrow Q(x)]$  คือ  $\exists x \forall y [P(x) \wedge \sim Q(x)]$

**ตัวอย่างที่ 2.26** กำหนดให้  $P(x)$  และ  $Q(x)$  เป็นประโยคเปิด โดยที่  $\forall x [P(x)] \rightarrow \exists x [\sim Q(x)]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง จงหาค่าความจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $\exists x [P(x) \wedge \sim Q(x)]$
2.  $\exists x [\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$
3.  $\forall x [P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$
4.  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

**วิธีทำ** จาก  $\forall x [P(x)] \rightarrow \exists x [\sim Q(x)]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ จะได้

$\forall x [P(x)]$  มีค่าความจริงเป็นจริง .....(1)

$\exists x [\sim Q(x)]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และ  $\exists x [\sim Q(x)]$  สมมูลกับ  $\sim \forall x [Q(x)]$

แสดงว่า  $\sim \forall x [Q(x)]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

นั่นคือ  $\forall x [Q(x)]$  มีค่าความจริงเป็นจริง .....(2)

จาก (1) และ (2) พบว่า สำหรับทุกค่า ของ  $x$  ใดๆ ใน  $\mathbb{R}$  ต่างก็ทำให้  $P(x)$  และ  $Q(x)$

เป็นจริง

นั่นคือ สำหรับค่าทุกๆ ค่า  $x$  ใดๆ ใน  $\mathbb{R}$  ทำให้  $P(x) \rightarrow Q(x)$  เป็นจริง

ดังนั้น  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

**ตัวอย่างที่ 2.27** กำหนดให้  $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$  และ  $y \in \{-1, 0, 1\}$  จงหาค่าความจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $\forall x \forall y [x^2 + y^2 > 1]$
2.  $\exists x \forall y [x - 2y \geq 0]$
3.  $\forall x \exists y [x - 2y < 0]$
4.  $\exists x \exists y [2x - 3y + 8 < 0]$

**วิธีทำ** จาก  $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$  และ  $y \in \{-1, 0, 1\}$

พิจารณาตัวเลือกแต่ละข้อ ดังนี้

ข้อ 1 เท็จ ลองแทนค่า  $x = 1, y = 0$  ใน  $x^2 + y^2 > 1$

จะได้  $1^2 + 0^2 > 1$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดังนั้น  $\forall x \forall y [x^2 + y^2 > 1]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อ 2 จริง ลองแทนค่า  $x = 2$  ใน  $x - 2y \geq 0$

จะได้  $2 - 2y \geq 0$

$2 \geq 2y$

$$y \leq 1$$

นั่นคือ เมื่อ  $x = 2$  ใน  $\forall y[y \leq 1]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ดังนั้น  $\exists x \forall y[x - 2y < 0]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อ 3 เท็จ ลองแทนค่า  $x = 2$  ใน  $x - 2y < 0$

$$\text{จะได้} \quad (2) - 2y < 0$$

$$2 < 2y$$

$$y > 1$$

ซึ่งพบว่าค่า  $y$  ดังกล่าวไม่อยู่ใน  $\{-1, 0, 1\}$

ดังนั้น  $\forall x \exists y[x - 2y < 0]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อ 4 เท็จ พิจารณาประโยคเปิด  $2x - 3y + 8 < 0$

$$\text{ลองแทนค่า } y = -1 \text{ จะได้ } 2x - 3(-1) + 8 < 0 \text{ ทำให้ } x < -\frac{11}{2}$$

ซึ่งค่า  $x$  ดังกล่าวไม่ใช่สมาชิกใน  $\{-2, -1, 1, 2\}$

$$\text{ลองแทนค่า } y = 0 \text{ จะได้ } 2x - 3(0) + 8 < 0 \text{ ทำให้ } x < -4$$

ซึ่งค่า  $x$  ดังกล่าวไม่ใช่สมาชิกใน  $\{-2, -1, 1, 2\}$

$$\text{ลองแทนค่า } y = 1 \text{ จะได้ } 2x - 3(1) + 8 < 0 \text{ ทำให้ } x < -\frac{5}{2}$$

ซึ่งค่า  $x$  ดังกล่าวไม่ใช่สมาชิกใน  $\{-2, -1, 1, 2\}$

จึงสรุปว่าไม่มีค่า  $x, y$  ใดๆในขอบเขตที่กำหนดให้มาแทนค่าใน  $2x - 3y + 8 < 0$  แล้ว ทำให้อสมการดังกล่าวเป็นจริง

ดังนั้น  $\exists x \exists y[2x - 3y + 8 < 0]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 2.28 จงหา นิเสธของ

$$\forall x \exists y \exists z \left[ \text{ถ้า } x + y > z \text{ แล้ว } \left( x + y > \frac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \frac{1}{z} \right) \right]$$

วิธีทำ ให้  $A$  แทน  $x + y > z$

$$B \text{ แทน } x + y > \frac{1}{z}$$

$$C \text{ แทน } x^2 + y^2 > \frac{1}{z}$$

นิเสธของ “ถ้า  $x + y > z$  แล้ว  $\left( x + y > \frac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \frac{1}{z} \right)$ ” คือ

$$\sim [A \rightarrow (B \vee C)] \equiv A \wedge \sim (B \vee C)$$

$$\equiv A \wedge \sim B \wedge \sim C$$

ถอดกลับเป็นข้อความว่า “ $x + y > z$  และ  $x + y \leq \frac{1}{z}$  และ  $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{z}$ ”

$$\text{ดังนั้น นิเสธของ } \forall x \exists y \exists z \left[ \text{ถ้า } x + y > z \text{ แล้ว } \left( x + y > \frac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \frac{1}{z} \right) \right]$$

คือ  $\sim \forall x \exists y \exists z \left[ \text{ถ้า } x + y > z \text{ แล้ว } \left( x + y \frac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \frac{1}{z} \right) \right] \equiv \exists x \forall y \forall z [x + y > z$   
 และ  $x + y \leq \frac{1}{z}$  และ  $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{z}]$

## 2.7 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

การให้เหตุผล (Reasoning) เป็นการกระทำเพื่อหาข้อสรุปหรือข้อสนับสนุนความเชื่อซึ่งถือเป็นอีกกระบวนการที่สำคัญในทางตรรกศาสตร์ การให้เหตุผลมีอยู่ 2 ลักษณะ ได้แก่ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และแบบนิรนัย

### 2.7.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย

การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการใช้ความจริงจากส่วนย่อยนำไปสรุปความจริงของส่วนรวม หรือกล่าวว่าเป็นการสรุปผลทั่วไปซึ่งมาจากการสังเกตหรือการทดลองในกรณีย่อยๆ หลายครั้ง เช่น เราสังเกตเห็นว่าในทุกเช้าพระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก ดังนั้นเราจึงสรุปแบบขยายผลว่าพระอาทิตย์จะขึ้นทางทิศตะวันออกเสมอ ข้อควรระวังในการให้เหตุผลแบบอุปนัยคือ ข้อสรุปที่ได้ไม่จำเป็นต้องถูกต้องทุกครั้ง เนื่องจากการสรุปผลเกินขอบเขตที่เราพิจารณาออกไปสิ่งที่มีผลต่อความน่าเชื่อถือ ได้แก่

1. จำนวนข้อมูลที่มีเพียงพอหรือไม่ เช่น สุ่มหยิบลูกบอลได้สีแดงติดกัน 4 ครั้ง จึงสรุปเอาว่าบอลทุกลูกมีสีแดง ซึ่งอาจผิดก็ได้
2. ข้อมูลที่ใช้นั้นเป็นตัวแทนที่ดีแล้วหรือไม่ เช่น สุ่มถามคน 100 คนในบริเวณสยามสแควร์ พบว่าอายุไม่เกิน 22 ปีถึง 70 คน จึงสรุปเอาว่าในกรุงเทพฯ มีประชากรวัยรุ่นจำนวนมากกว่ววัยทำงานอยู่เท่าตัว ซึ่งอาจเป็นข้อสรุปที่ผิด
3. ข้อสรุปที่ต้องการมีความซับซ้อนเกินไปหรือไม่ เช่น ความเชื่อ ความพึงพอใจ ซึ่งมักจะขึ้นกับเหตุผลต่างๆ กัน

### 2.7.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย

การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการใช้ความจริงที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปย่อยใดๆ เช่น เป็นความจริงที่ว่าจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัวเป็น จำนวนคู่ และ 10 หารด้วย 2 ลงตัว เราจึงสรุปว่า 10 เป็นจำนวนคู่

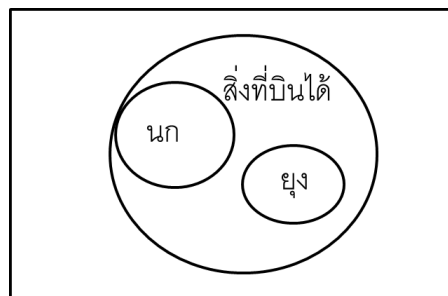
### ตัวอย่างที่ 2.29 พิจารณาการอ้างเหตุผล

|      |                           |
|------|---------------------------|
| เหตุ | (1) สัตว์ปีกทุกตัวบินได้  |
|      | (2) แมวบางตัวเป็นสัตว์ปีก |
| ผล   | แมวบางตัวบินได้           |

ข้อสรุปนี้เป็นข้อสรุปที่สมเหตุสมผล (valid) แม้ว่าผลจะขัดแย้งกับความจริงในโลกก็ตาม ข้อควรระวังในการให้เหตุผลแบบนิรนัยคือ ในบางครั้งเมื่อเราใช้ความรู้สึกเพียงผิวเผินตัดสิน อาจจะทำให้การอ้างเหตุผลนั้นสมเหตุสมผล ทั้งที่จริงๆ แล้วไม่ใช่ เช่น

|      |                    |
|------|--------------------|
| เหตุ | (1) นกทุกตัวบินได้ |
|      | (2) ยุงบินได้      |
| ผล   | ยุงเป็นนก          |

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลแบบนิรนัย สามารถทำได้อย่างรอบคอบ โดยใช้แผนภาพของเซต (แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์) ช่วยในการคิด



รูปที่ 2.1 แสดงการเขียนให้เหตุผลแบบนิรนัยด้วยแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

จากรูปภาพจะเห็นว่าไม่สมเหตุสมผล เพราะอาจจะมีสิ่งอื่นที่ไม่ใช่ นก แต่บินได้

เนื้อหาตรรกศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นล้วนแล้วมีความสำคัญและเกี่ยวโยงกัน ตั้งแต่ต้องแยกให้ออกว่าประโยคใดเป็นประพจน์บ้าง เนื่องจากเนื้อหาตรรกศาสตร์ให้ความสนใจเฉพาะประโยคที่เป็นประพจน์เท่านั้น ตัวเชื่อมประพจน์พื้นฐานเพื่อนำไปสู่การหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบที่ซับซ้อน การสร้างตารางค่าความจริงเพื่อหาค่าความจริงที่มีโอกาสเป็นไปได้ทั้งหมด การหาความ

สมมูลของประพจน์เพื่อการมองประพจน์ที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจมากกว่า ตลอดจนการอ้างเหตุผล  
ประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ รวมถึงการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

จากเนื้อหาทางตรรกศาสตร์ทั้งหมดจะเห็นว่าเป็นพื้นฐานความรู้ที่มีความสำคัญมาก ไม่ใช่เพียงผู้  
เรียนในสาขาวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่มีประโยชน์สำหรับผู้เรียนทุกสาขาวิชา เนื่องจากจำเป็นต้องใช้  
ตรรกะเบื้องต้นทั้งในกระบวนการคิดกระบวนการตัดสินใจ การวิเคราะห์ข้อความที่ใช้ในชีวิตประจำวัน  
รวมถึงการวิเคราะห์เนื้อหาขั้นสูงในแต่ละสาขาวิชาอีกด้วย

## แบบฝึกหัดท้ายบท

1. กำหนดให้  $p, r$  เป็นจริง และ  $q, s$  เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad [(p \wedge s) \vee (p \wedge r)] \rightarrow (p \vee s)$$

$$1.2 \quad [(q \rightarrow s) \vee r] \vee [(q \leftrightarrow s) \wedge r]$$

$$1.3 \quad [(r \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \wedge \sim q)$$

$$1.4 \quad [(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow r)] \vee \sim s$$

$$1.5 \quad [(q \rightarrow p) \wedge r] \leftrightarrow \sim (\sim r)$$

$$1.6 \quad [(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \rightarrow [(\sim p \vee q) \leftrightarrow r]$$

$$1.7 \quad [(p \wedge \sim q) \vee \sim r] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \rightarrow r)]$$

2. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad [(p \wedge s) \vee (p \wedge r)] \rightarrow (p \vee s)$$

$$2.2 \quad [(q \rightarrow s) \vee r] \vee [(q \leftrightarrow s) \wedge r]$$

$$2.3 \quad [(r \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \wedge \sim q)$$

$$2.4 \quad [(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow r)] \vee \sim s$$

$$2.5 \quad [(q \rightarrow p) \wedge r] \leftrightarrow \sim (\sim r)$$

$$2.6 \quad [(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \rightarrow [(\sim p \vee q) \leftrightarrow r]$$

$$2.7 \quad [(p \wedge \sim q) \vee \sim r] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \rightarrow r)]$$

3. ข้อความในข้อใดสมมูลกันบ้าง

$$3.1 \quad \text{ถ้า } a \text{ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว } a \text{ เป็นจำนวนคู่ หรือ } a \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

$$3.2 \quad \text{ถ้า } a \text{ ไม่เป็นจำนวนคู่ และ } a \text{ ไม่เป็นจำนวนคี่ แล้ว } a \text{ ไม่เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$3.3 \quad a \text{ ไม่เป็นจำนวนเต็ม หรือ } a \text{ เป็นจำนวนคู่ หรือ } a \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

4. ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$4.1 \quad [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)] \rightarrow (r \vee s)$$

$$4.2 \quad \sim (p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \wedge q)$$

$$4.3 \quad [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

5. จงแสดงว่าประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ สมมูลกัน โดยใช้กฎการสมมูลต่างๆ

$$5.1 \quad [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv \sim (p \vee q)] \vee r$$

$$5.2 \quad \sim (p \rightarrow \sim q) \equiv (p \wedge q)$$

$$5.3 \quad [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

6. จงตรวจสอบการอ้างเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถ้าสมเหตุสมผล จงพิสูจน์

|     |      |     |                                         |
|-----|------|-----|-----------------------------------------|
| 6.1 | เหตุ | (1) | $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge w)$ |
|     |      | (2) | $\sim r \rightarrow \sim w$             |
|     | ผล   |     | $q \wedge w$                            |

|     |      |     |                             |
|-----|------|-----|-----------------------------|
| 6.2 | เหตุ | (1) | $\sim s \rightarrow \sim r$ |
|     |      | (2) | $\sim s$                    |
|     |      | (3) | $t \rightarrow w$           |
|     |      | (4) | $r \vee s$                  |
|     | ผล   |     | $w$                         |

|     |      |     |                                              |
|-----|------|-----|----------------------------------------------|
| 6.3 | เหตุ | (1) | $(h \rightarrow i) \wedge (j \rightarrow k)$ |
|     |      | (2) | $(i \vee k) \rightarrow l$                   |
|     |      | (3) | $\sim l$                                     |
|     | ผล   |     | $\sim (h \vee j)$                            |

### เอกสารอ้างอิง

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัตินิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว
- ยุวณิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ**. เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่
- สุนทร แสงผล และ ก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง

## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

### เนื้อหาประจำบท

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)
2. โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ (Domain and Range of Relation)
3. ตัวผกผันของความสัมพันธ์ (Inverse of Relation)
4. ฟังก์ชันชนิดต่างๆ
5. ลักษณะของฟังก์ชัน
6. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด
7. การดำเนินการของฟังก์ชัน (Operation of functions)
8. ฟังก์ชันประกอบ (Composite functions)
9. ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse functions)

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปแบบต่างๆ เช่น ตาราง สมการ และกราฟได้
2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้
4. บอกความหมายของผลคูณคาร์ทีเซียน และนำไปใช้ได้

### วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
  - 1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)
  - 1.2 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ (Domain and Range of Relation)
  - 1.3 ตัวผกผันของความสัมพันธ์ (Inverse of Relation)
  - 1.4 ฟังก์ชันชนิดต่างๆ
  - 1.5 ลักษณะของฟังก์ชัน
  - 1.6 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด
  - 1.7 การดำเนินการของฟังก์ชัน (Operation of functions)
  - 1.8 ฟังก์ชันประกอบ (Composite functions )
  - 1.9 ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse functions)
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์

2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

### สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ
2. Slide Presentation

### การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึกและการซักถาม
2. แบบทดสอบ
3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

## บทที่ 3

### ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์และฟังก์ชันเป็นเรื่องพื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้พื้นฐานจากการเรียนเรื่อง เซต สมการ อสมการ และความสัมพันธ์ต่างๆ มีการนำความรู้ไปใช้อย่างกว้างขวางประยุกต์ใช้ในการทำงานหลากหลายสาขาวิชา ทั้งทางด้านพาณิชยศาสตร์ ด้านวิศวกรรม ด้านคอมพิวเตอร์ ฯลฯ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงในเรื่องอื่นๆ เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิธึม แคลคูลัส เป็นต้น สิ่งหนึ่งที่เป็นพื้นฐานสำคัญในเรื่องของความสัมพันธ์ คือ คู่อันดับ การเป็นคู่อันดับคือต้องเป็นคู่และมีอันดับ จะเขียนแทนคู่อันดับในรูป  $(a, b)$  โดยที่  $a$  เป็นสมาชิกตัวหน้าและ  $b$  เป็นสมาชิกตัวหลัง สิ่งสำคัญมากคือทั้ง  $a$  และ  $b$  จะวางสลับที่ไม่ได้ นอกจาก  $a = b$  เท่านั้น กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ  $(a, b) = (c, d)$  ก็ต่อเมื่อ  $a = c$  และ  $b = d$

#### 3.1 ความสัมพันธ์ (Relation)

##### บทนิยาม 3.1.1

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต  $A$  และเซต  $B$  คือเซตของคู่อันดับ  $(a, b)$  ทั้งหมด โดยที่  $a$  เป็น สมาชิกของเซต  $A$  และ  $b$  เป็นสมาชิกของเซต  $B$  เขียนเซตในรูปแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

**ตัวอย่างที่ 3.1** กำหนดให้  $A = \{a, b, c\}$  และ  $B = \{1, 2\}$  จงหา  $A \times B$  และ  $B \times A$

**วิธีทำ** เราสามารถหาคู่อันดับทั้งหมดจากการจับคู่สมาชิกของเซตตัวหน้า 1 ตัว จับกับสมาชิกทุกตัวของเซตตัวหลัง เมื่อทำครบทุกตัวของสมาชิกตัวหน้าเราจะได้คู่อันดับทั้งหมด ดังนี้

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

จากตัวอย่าง จะเห็นชัดเจนว่า  $A \times B \neq B \times A$  หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าการคูณคาร์ทีเซียนไม่มีสมบัติการสลับที่

##### บทนิยาม 3.1.2

เราจะกล่าวว่า  $r$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$  ก็ต่อเมื่อ  $r$  เป็นสับเซตของ  $A \times B$  โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้า  $r \subseteq A \times B$  เรียก  $r$  ว่าความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$  และ ถ้า  $r \subseteq A \times A$  เรียก  $r$  ว่าความสัมพันธ์ในเซต  $A$

**ตัวอย่างที่ 3.2** กำหนดให้  $A = \{1, 2, 3\}$  และ  $B = \{4, 6, 9\}$  จงเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกของ  $r_1$  และ  $r_2$  ถ้า  $r_1$  คือความสัมพันธ์สองเท่าจาก  $A$  ไป  $B$  และ ถ้า  $r_2$  คือความสัมพันธ์กำลังสองจาก  $A$  ไป  $B$

**วิธีทำ** ก่อนอื่นต้องเริ่มจากการหา  $A \times B$  นั่นคือ

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 6), (1, 9), (2, 4), (2, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (3, 9)\}$$

พิจารณาความสัมพันธ์  $r_1$  และ  $r_2$  คือ

$$r_1 = \{(2, 4), (3, 6)\}$$

$$r_2 = \{(2, 4), (3, 9)\}$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะเห็นว่าสมาชิกของ  $r_1$  และ  $r_2$  ถูกเลือกมาจาก  $A \times B$  ดังนั้น ไม่  
ว่าจะสร้างความสัมพันธ์แบบใดจาก  $A$  ไป  $B$  ก็จะเป็นสับเซตของ  $A \times B$  เสมอ

**หมายเหตุ** ในกรณี  $A$  และ  $B$  เป็นเซตของจำนวนจริง เราอาจเขียน  $x \in \mathbb{R}$  และ  $y \in \mathbb{R}$  ไว้ใน  
ฐานที่เข้าใจว่า  $r$  เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง ได้ดังนี้ ถ้า

$$r = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

เขียนแทนด้วย  $r = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$  หรือเขียนเฉพาะกฎเกณฑ์ของความสัมพันธ์ซึ่งบรรยาย  
ลักษณะของความสัมพันธ์คือ  $x^2 + y^2 = 1$

**ตัวอย่างที่ 3.3** ถ้า  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  และ  $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$  แล้วจำนวนสมาชิก  
ในความสัมพันธ์  $r$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

**วิธีทำ** จาก  $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$  คือ เซตของคู่อันดับที่มาจาก  $A \times A$  แล้วสมาชิกตัว  
หน้าน้อยกว่าหรือเท่ากับตัวหลัง

ถ้า  $x = 1$  แล้วจะได้  $1 \leq y$  นั่นคือ  $y = 1, 2, 3$  หรือ  $4$

จะได้คู่อันดับ  $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$

ถ้า  $x = 2$  แล้วจะได้  $2 \leq y$  นั่นคือ  $y = 2, 3$  หรือ  $4$  จะได้คู่อันดับ  $(2, 2), (2, 3), (2, 4)$

ถ้า  $x = 3$  แล้วจะได้  $3 \leq y$  นั่นคือ  $y = 3$  หรือ  $4$  จะได้คู่อันดับ  $(3, 3), (3, 4)$

ถ้า  $x = 4$  แล้วจะได้  $4 \leq y$  นั่นคือ  $y = 4$  จะได้คู่อันดับ  $(4, 4)$

$$\therefore r = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

ดังนั้น จำนวนสมาชิกในความสัมพันธ์  $r$  เท่า 10

**บทนิยาม 3.1.3**

กำหนดให้ความสัมพันธ์  $r$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$  โดเมนของ  $r$  คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน  $r$  เขียนแทนด้วย  $D_r$  และเรนจ์ของ  $r$  คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน  $r$  เขียนแทนด้วย  $R_r$

**ตัวอย่างที่ 3.4** จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ของแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. r_1 = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

$$2. r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | y = x + 1\}$$

**วิธีทำ** จากนิยามการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นสองส่วน คือ ในกรณีที่เซตแบบแจกแจงสมาชิกจะสามารถทำตามนิยามได้โดยง่าย ส่วนอีกกรณีที่เซตแบบแสดงเงื่อนไขจำเป็นต้องพิจารณาอย่างละเอียด พิจารณาข้อ 1. จากนิยามเห็นได้ชัดว่า

$$D_{r_1} = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

$$R_{r_1} = \{9, 4, 1, 4, 9\}$$

ส่วนข้อ 2. เห็นได้ชัดว่า  $D_{r_2}, R_{r_2} \subset \mathbb{N}$  พิจารณาแล้วพบว่าสามารถแทนจำนวนนับทุกตัวลงบน  $x$  ในสมการ  $y = x + 1$  ดังนั้น  $D_{r_2} = \mathbb{N}$  แต่  $R_{r_2} = \{2, 3, 4, \dots\}$

**ตัวอย่างที่ 3.5** กำหนดให้  $A = \{1, 2, 3\}$  และ  $B = \{a, b\}$  ถ้า  $S = \{r | r \subset A \times B\}$  และ  $F = \{r \in S | r \text{ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีจำนวนสมาชิกในโดเมนเท่ากับ } 2\}$  แล้ว  $n(F)$  เท่ากับเท่าใด

**วิธีทำ** จาก  $A = \{1, 2, 3\}$  และ  $B = \{a, b\}$

จะได้  $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$  ถ้า  $S = \{r | r \subset A \times B\}$  และ

$$F = \{r \in S | r \text{ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีจำนวนสมาชิกในโดเมนเท่ากับ } 2\}$$

$$= \{r \subset A \times B | r \text{ เป็นฟังก์ชัน}\} \text{ และ } n(D_r) = 2$$

พิจารณาความสัมพันธ์  $r$  ในเซต  $F$  เป็น 3 กรณีดังนี้

$$\text{กรณีที่ 1 } r = \{(1, x), (2, y)\}$$

$$\text{กรณีที่ 2 } r = \{(1, x), (3, y)\}$$

$$\text{กรณีที่ 3 } r = \{(2, x), (3, y)\}$$

ในแต่ละกรณีสามารถหาค่า  $x$  และ  $y$  เพื่อจับคู่กับ 1 และ 2 ตามลำดับได้ทั้งหมด  $2 \times 2 = 4$  วิธี

ดังนั้น จำนวนความสัมพันธ์ในเซต  $F$  มีทั้งหมด  $3 \times 4 = 12$  ความสัมพันธ์ นั่นคือ  $n(F) = 12$

**ตัวอย่างที่ 3.6** กำหนดให้  $S = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } |x| \leq 5\}$  และ  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + a^2}{x^4 + bx + 4}$

โดยที่  $a \in S, b \in S$  จำนวนคู่ลำดับ  $(a, b) \in S \times S$  ทั้งหมดที่ทำให้  $f(1) = 0$  เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จาก  $S = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } |x| \leq 5\}$  จะได้

$$S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{และจาก } f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4(1) + a^2}{x^4 + bx + 4} \text{ โดยที่ } a \in S, b \in S$$

$$\text{พิจารณา } f(1) = \frac{(1)^3 - (1)^2 - 4(1) + a^2}{(1)^4 + b(1) + 4} = \frac{a^2 - 4}{b + 5} = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{a^2 - 4}{b + 5} = 0$$

$$\text{แสดงว่า } a^2 - 4 = 0 \text{ และ } b + 5 \neq 0$$

$$a^2 = 4 \text{ และ } b \neq -5$$

$$a = 2, -2 \text{ และ } b \neq -5$$

ดังนั้นจำนวนคู่อันดับ  $(a, b) \in S \times S$  ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น เท่ากับ

จำนวนวิธีเลือกค่า  $a$  คูณจำนวนที่เลือกค่า  $b = 2 \times 10 = 20$  วิธี

#### บทนิยาม 3.1.4

ตัวผกผันของความสัมพันธ์  $r$  คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ  $r$  เขียนแทนด้วย  $r^{-1}$  และเขียน  $r^{-1}$  ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้  $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 3.7 กำหนดให้  $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (4, -1), (-1, 0)\}$  และ

$$r_2 = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$$

วิธีทำ จากนิยามตัวผกผันของความสัมพันธ์ทำให้ได้ว่า

$$r_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (-1, 4), (0, -1)\}$$

$$r_2^{-1} = \{(y, x) \mid y = 2x - 1\}$$

$$= \{(x, y) \mid y = \frac{x+1}{2}\}$$

ตัวอย่างที่ 3.8 กำหนดให้  $r = \{(x, y) \mid 2x + 3y - 7 = 0\}$

จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์  $r$

วิธีทำ จากนิยามตัวผกผันของความสัมพันธ์ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} r^{-1} &= \{(y, x) | 2x + 3y - 7 = 0\} \\ &= \{(x, y) | 2y + 3x - 7 = 0\} \end{aligned}$$

### 3.2 ฟังก์ชัน (Functions)

#### บทนิยาม 3.2.1

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใดๆของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน สามารถเขียนด้วยภาษาทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้  $f$  เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ถ้า  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$  และ  $x_1 = x_2$  แล้ว  $y_1 = y_2$  ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชัน และ  $(x, y) \in f$  แล้วเราจะกล่าวว่า  $y$  เป็นค่าของของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  ค่าของของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  เขียนแทนด้วย  $f(x)$  อ่านว่า เอฟออฟเอ็กซ์

ตัวอย่างที่ 3.9 กำหนดให้  $g = \{(1, a), (2, b), (3, b), (5, c)\}$  จงพิจารณาว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากสองคู่อันดับใดๆของความสัมพันธ์นั้น ไม่มีสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน ดังนั้น  $g$  เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3.10 กำหนดให้  $f = \{(x, y) \mid y^2 + x^2 = 1\}$  จงพิจารณาว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ กำหนดให้  $x = 0.5$  พิจารณา

$$y^2 + 0.5^2 = 1$$

$$y^2 + 0.25 = 1$$

$$y^2 = 0.75$$

จะเห็นว่า  $y$  เป็นไปได้ 2 ค่า คือ  $\sqrt{0.75}$  และ  $-\sqrt{0.75}$  ดังนั้น  $f$  ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3.11 กำหนดให้  $h = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$  จงพิจารณาว่า  $h$  เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ จะแสดงว่า  $h$  เป็นฟังก์ชันด้วยการพิสูจน์ โดยใช้วิธีการ สมมติว่า  $x_1 = x_2$  แล้วแสดงให้เห็นว่า

$f(x_1) = f(x_2)$  พิจารณา

$$x_1 = x_2$$

$$(x_1)^2 = (x_2)^2$$

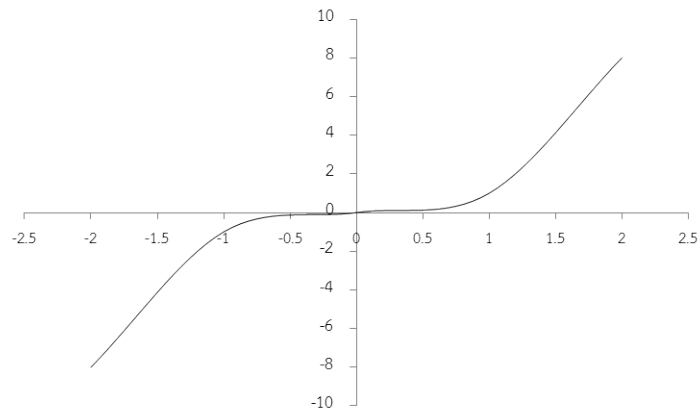
$$(x_1)^2 - 1 = (x_2)^2 - 1$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

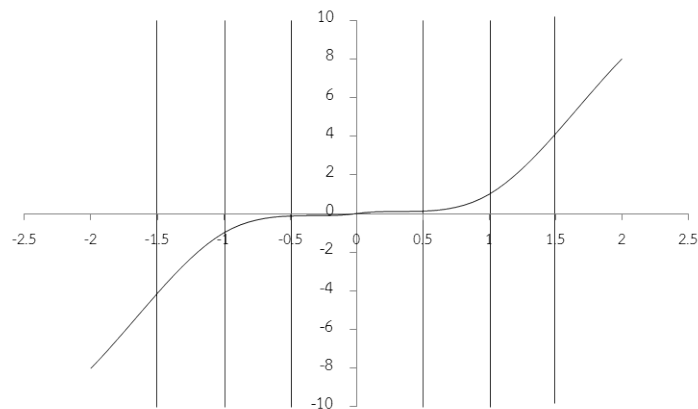
ดังนั้น  $h$  เป็นฟังก์ชัน

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเราสามารถตรวจสอบได้ว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดมาให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ อย่างไรก็ตามมีบางความสัมพันธ์ที่ตรวจสอบยาก แต่เราสามารถคาดการณ์ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดมาให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยมองจากกราฟความสัมพันธ์ หากลากเส้นตรงใดๆ ขนานกับแกน  $y$  แล้วตัดกราฟความสัมพันธ์เพียงจุดเดียวเสมอสามารถคาดการณ์ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชัน อย่างไรก็ตามวิธีการนี้ถูกนำมาใช้ตรวจสอบบ่อยครั้ง หากผู้อ่านต้องการใช้วิธีนี้จะต้องพิจารณาอย่างรอบคอบ รวมถึงต้องทราบว่าวิธีนี้ใช้ตรวจสอบเท่านั้นแต่ไม่ได้เป็นการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3.12 จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่



วิธีทำ ลากเส้นตรงใดๆที่ขนานกับแกน  $y$  จะตัดกราฟความสัมพันธ์เพียงจุดเดียวเท่านั้น



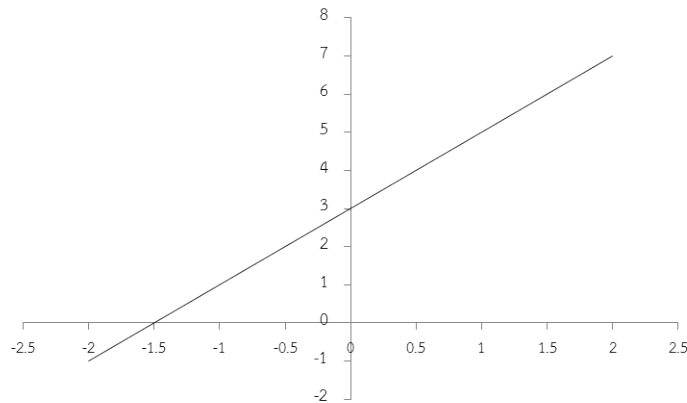
ดังนั้นเราสามารถคาดการณ์ได้ว่าความสัมพันธ์ที่ให้กราฟนี้เป็นฟังก์ชัน

จากตัวอย่างต่างๆที่ผ่านมาแสดงถึงวิธีการตรวจสอบความสัมพันธ์ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เมื่อเราพิจารณาแล้วพบว่ามีความสัมพันธ์เป็นจำนวนมากที่มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชัน ซึ่งพอจะจำแนกออกเป็นฟังก์ชันแบบต่างๆ โดยผู้เขียนจะกล่าวถึงฟังก์ชันที่นิยมใช้งานและเป็นที่รู้จักในวงกว้าง

### 3.3 ฟังก์ชันชนิดต่างๆ

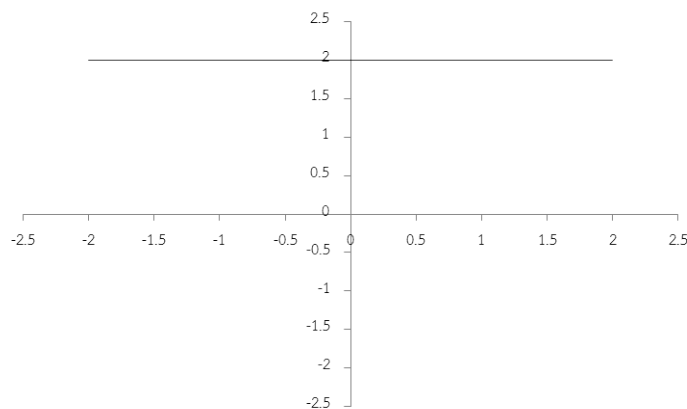
#### 3.3.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear functions)

ฟังก์ชันเชิงเส้น คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป  $f(x) = ax + b$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง เช่น  $f(x) = 3x + 5$ ,  $f(x) = x - 2$ ,  $f(x) = -3x$  เป็นต้น กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน  $y$  ดังรูป



รูปที่ 3.1 แสดงตัวอย่างกราฟฟังก์ชันเชิงเส้น

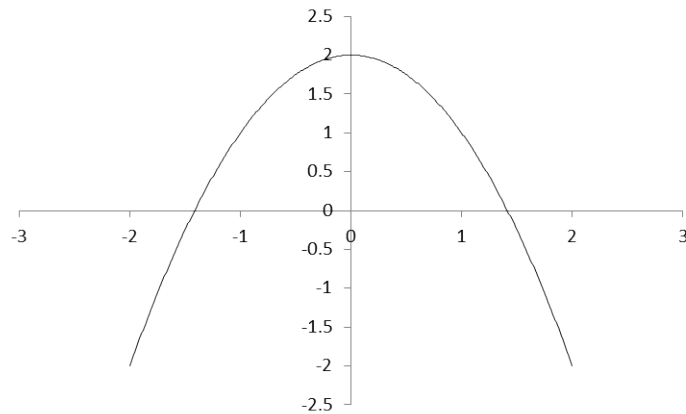
ถ้าฟังก์ชันเชิงเส้น  $f(x) = ax + b$  เมื่อ  $a = 0$  จะได้ฟังก์ชันในรูป  $f(x) = b$  ฟังก์ชันนี้มีชื่อเรียกเฉพาะว่า ฟังก์ชันคงตัว (Constant function) กราฟของฟังก์ชันคงตัวจะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน  $x$  ดังรูป



รูปที่ 3.2 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันคงตัว

### 3.3.2 ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic functions)

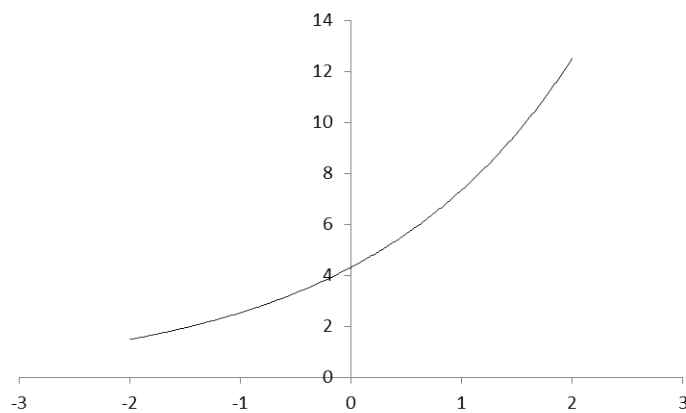
ฟังก์ชันกำลังสอง หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป  $f(x) = ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริง และ  $a \neq 0$  เมื่อนำมาวาดเป็นกราฟ จะถูกเรียกว่า พาราโบลา ซึ่งมีทั้งพาราโบลาคว่ำ และ พาราโบลาหงาย



รูปที่ 3.3 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

### 3.3.3 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential functions)

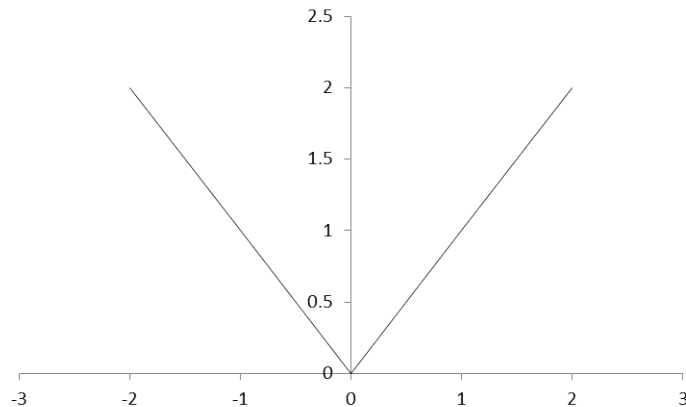
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่เขียนในรูป  $y = a^x$  โดยที่  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  เป็นฟังก์ชันที่ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวาง เช่นการคิดดอกเบี้ยของธนาคาร เป็นต้น สามารถนำมาเขียนกราฟได้ดังรูป



รูปที่ 3.4 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

### 3.3.4 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute value functions )

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ คือ ฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่ เช่น  $f(x) = |x|$  เป็นต้น สามารถนำมาเขียนกราฟได้ดังรูป



รูปที่ 3.5 แสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

นอกเหนือไปจากฟังก์ชันที่กล่าวมาแล้ว ยังมีฟังก์ชันอีกหลายฟังก์ชันที่มีความสำคัญในทางคณิตศาสตร์ เช่น ฟังก์ชันขั้นบันได (Step functions) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric functions) เป็นต้น

### 3.4 ลักษณะของฟังก์ชัน

#### 3.4.1 ฟังก์ชันจาก $A$ ไป $B$ (into functions)

##### บทนิยาม 3.4.1

กำหนดให้  $A$  และ  $B$  เป็นเซต จะกล่าวว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $A$  ไป  $B$  ก็ต่อเมื่อ

1.  $f$  เป็นฟังก์ชัน
2.  $D_f = A$  และ  $R_f \subset B$

เขียนฟังก์ชัน  $f$  แทนฟังก์ชันจาก  $A$  ไป  $B$  ด้วย  $f : A \rightarrow B$

**ตัวอย่างที่ 3.12** ฟังก์ชัน  $f(x) = x^2$  เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากจำนวนจริงไปยังจำนวนจริงบวกรวมศูนย์ เขียนแทนด้วย  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

#### 3.4.2 ฟังก์ชันทั่วถึง (onto or surjective functions)

##### บทนิยาม 3.4.2

กำหนด  $A$  และ  $B$  เป็นเซต จะกล่าวว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $A$  ไปทั่วถึง  $B$  ก็ต่อเมื่อ

1.  $f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $A$  ไป  $B$
2.  $R_f = B$

เขียนฟังก์ชัน  $f$  แทนฟังก์ชันจาก  $A$  ไปทั่วถึง  $B$  ด้วย  $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$

ฟังก์ชันทั่วถึงสามารถแสดงจากข้อความ สำหรับทุกสมาชิกใดๆ ในเรนจ์ จะมีสมาชิกในโดเมนที่ส่งไปยังสมาชิกตัวนั้นเสมอ

**ตัวอย่างที่ 3.13** กำหนดให้  $f = \{(x, y) | y = 3x + 1\}$  จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

วิธีทำ ให้  $A$  เป็นสมาชิกใดๆ ในเรนจ์ นั่นคือ  $A \in \mathbb{R}$

เลือก  $x = \frac{A-1}{3} \in \mathbb{R}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{A-1}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{A-1}{3}\right) + 1 \\ &= A \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

### 3.4.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one or injective functions)

#### บทนิยาม 3.4.3

ฟังก์ชัน  $f$  จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก  $x_1$  และ  $x_2$  ใดๆ ในโดเมนของ  $f$  ถ้า  $f(x_1) = f(x_2)$  แล้ว  $x_1 = x_2$

**ตัวอย่างที่ 3.14** กำหนดให้  $f = \{(x, y) | y = 3x + 1\}$  จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ สมมติว่า  $y_1 = y_2$  ดังนั้น

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$$

$$x_1 = x_2$$

นั่นคือ  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

#### บทนิยาม 3.4.4

กำหนดให้  $A, B$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ  $f : A \longrightarrow B$  เรียก  $f$  ว่าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (bijective function or bijection) หรือกล่าวว่ามี การสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one correspondence) ระหว่าง  $A$  และ  $B$  ซึ่ง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B \text{ ก็ต่อเมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก } A \text{ ไปบน } B$$

**ตัวอย่างที่ 3.15** ให้  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  โดยที่  $f(x) = x + 2$  สำหรับทุก  $x \in \mathbb{Z}$  จงพิจารณาว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงหรือไม่

วิธีทำ สมมติให้  $b \in \mathbb{Z}$  จะได้ว่ามี  $a = b - 2 \in \mathbb{Z}$  ที่ทำให้  $f(a) = f(b - 2) = (b - 2) + 2 = b$  ดังนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันทั่วถึง  $\mathbb{Z}$  ต่อไปสมมติให้  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  โดยที่  $f(x_1) = f(x_2)$  จะได้ว่า  $x_1 + 2 = x_2 + 2$   $x_1 = x_2$  แสดงว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงสรุปได้ว่า  $f : \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{Z}$

**ตัวอย่างที่ 3.16** ให้  $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  กำหนดโดย  $g(x) = 4x$  สำหรับทุก  $x \in \mathbb{Z}$  จงพิจารณาว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก  $2 \in \mathbb{Z}$  แต่ไม่มี  $a \in \mathbb{Z}$  ที่ทำให้  $g(a) = 2$  ดังนั้น  $g$  ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง  $\mathbb{Z}$  และ ถ้าสมมติให้  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  โดยที่  $g(x_1) = g(x_2)$  แล้วจะได้ว่า  $4x_1 = 4x_2$  นั่นคือ  $x_1 = x_2$  แสดงว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงสรุปได้ว่า  $g : \mathbb{Z} \xleftarrow{1-1} \mathbb{Z}$  แต่  $g$  ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

**บทนิยาม 3.4.5**

กำหนดให้  $A, B$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกฟังก์ชัน  $i_A : A \rightarrow A$  ซึ่งกำหนดโดย

$$i_A(x) = x \text{ สำหรับทุก } x \in A$$

ว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) บน  $A$  และถ้า  $b$  เป็นสมาชิกตัวหนึ่งของ  $B$  แล้วเรียกฟังก์ชัน  $f : A \rightarrow B$  ซึ่งกำหนดโดย  $f(x) = b$  สำหรับทุก  $x \in A$  ว่าฟังก์ชันคงตัว (constant function) ที่มี  $R_f = \{b\}$

**ข้อสังเกต** จากบทนิยาม 3.4.5 จะได้ว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์  $i_A$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง นั่นคือ  $i_A : \xrightarrow[onto]{1-1} A$  สำหรับฟังก์ชันคงตัว  $f : a \rightarrow B$  เราพบว่า  $f$  จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ  $A$  มีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น และ  $f$  จะเป็นฟังก์ชันทั่วถึง  $B$  ก็ต่อเมื่อ  $B = \{b\}$

**3.4.4 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (increasing and decreasing functions)****บทนิยาม 3.4.6**

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันบน  $A$

1.  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน  $A$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก  $x_1$  และ  $x_2$  ใดๆ ใน  $A$

ถ้า  $x_1 < x_2$  แล้ว  $f(x_1) < f(x_2)$

2.  $f$  เป็นฟังก์ชันลดใน  $A$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก  $x_1$  และ  $x_2$  ใดๆใน  $A$

ถ้า  $x_1 < x_2$  แล้ว  $f(x_1) > f(x_2)$

**ตัวอย่างที่ 3.17** กำหนดให้  $f = \{(x, y) | y = 3x + 1\}$  จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

**วิธีทำ** สมมติว่า  $x_1 < x_2$  ดังนั้น

$$3x_1 < 3x_2$$

$$3x_1 + 1 < 3x_2 + 1$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

นั่นคือ  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

**3.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน (Operation of functions)**

ถ้ามีฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไป อาจสร้างฟังก์ชันขึ้นมาใหม่โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่  $x$  ของแต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาบวก ลบ คูณ หาร กันดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 3.5.1**

กำหนดให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันบนเซตของจำนวนจริง

1.  $f + g = \{(x, y) \mid y = f(x) + g(x)\}$  และ  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$
2.  $f - g = \{(x, y) \mid y = f(x) - g(x)\}$  และ  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$
3.  $f \cdot g = \{(x, y) \mid y = f(x) \cdot g(x)\}$  และ  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$
4.  $\frac{f}{g} = \{(x, y) \mid y = \frac{f(x)}{g(x)}\}$  โดยที่  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$  และ  $g(x) \neq 0$

**ตัวอย่างที่ 3.18** กำหนดให้  $f(x) = 2x - 1$  และ  $g(x) = 3x + 2$  จงหา  $(f + g)(5)$

*วิธีทำ* จากนิยามจะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (2x - 1) + (3x + 2) \\ &= 5x + 1\end{aligned}$$

ดังนั้น

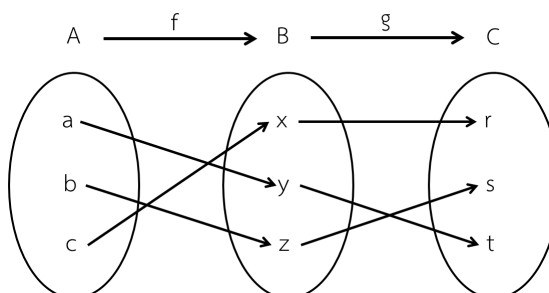
$$\begin{aligned}(f + g)(5) &= 5(5) + 1 \\ &= 26\end{aligned}$$

**บทนิยาม 3.5.2**

กำหนดให้  $A, B, C$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  โดยที่  $R_f \cap D_g \neq \emptyset$  ฟังก์ชันประกอบ (composite function) ของ  $g$  และ  $f$  ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $g \circ f$  หมายถึง  $\{(a, c) \in A \times C \mid (a, b) \in f \text{ และ } (b, c) \in g \text{ สำหรับบาง } b \in B\}$  นั่นคือ  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  สำหรับทุก  $x \in D_{g \circ f}$  เมื่อ  $D_{g \circ f} = \{a \in D_f \mid f(a) \in D_g\}$

ข้อสังเกต เราสามารถหาฟังก์ชันประกอบ  $g \circ f$  ได้ ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ  $f$  เป็นสับเซตโดเมนของ  $g$

**ตัวอย่างที่ 3.19** กำหนดให้  $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z\}$  และ  $C = \{r, s, t\}$  โดยที่  $f : A \rightarrow B$  และ  $g : B \rightarrow C$  เป็นฟังก์ชันดังรูป



วิธีทำ  $g \circ f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $A$  ไป  $C$  โดยที่

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(c)) = g(y) = t$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(a, t), (b, r), (c, t)\}$$

**ตัวอย่างที่ 3.20** ให้  $f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3)\}$  และ  $g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$  จงพิจารณาว่า จะสามารถหา  $g \circ f$  และ  $f \circ g$  ได้หรือไม่

วิธีทำ พิจารณา  $D_f = \{a, b, c\}$ ,  $R_f = \{1, 3\}$

$$D_g = \{1, 2, 3\}, R_g = \{4, 5\}$$

จะเห็นว่า  $R_f \subset D_g$  ดังนั้นเราสามารถหา  $g \circ f$  ได้ แต่  $R_g \not\subset D_f$  ดังนั้นหา  $f \circ g$

**ตัวอย่างที่ 3.21** กำหนดให้  $f(x) = x^2$  และ  $g(x) = x + 3$  จงพิจารณาว่า จะสามารถหา  $g \circ f$  และ  $f \circ g$  ได้หรือไม่

วิธีทำ พิจารณา  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = [0, \infty)$

$$D_g = \mathbb{R}, R_g = \mathbb{R}$$

จะเห็นว่าเราสามารถหาทั้ง  $g \circ f$  และ  $f \circ g$  ได้ ดังนี้

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f(x) = \{(x, y) | y = x^2 + 3\}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\text{ดังนั้น } f \circ g(x) = \{(x, y) | y = x^2 + 6x + 9\}$$

### บทนิยาม 3.5.3

กำหนดให้  $A, B$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ  $f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $A$  ไปยัง  $B$  เรียกเซต  $f^{-1}$  ว่าตัวผกผันของ  $f$  (inverse of a function  $f$ ) เมื่อ

$$f^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in f\} \subseteq B \times A$$

จากบทนิยาม 3.5.3 จะสังเกตได้ว่า  $f^{-1}$  ไม่จำเป็นจะต้องเป็นฟังก์ชันจาก  $B$  ไปยัง  $A$

### ทฤษฎีบท 3.5.1

กำหนดให้  $A, B$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $A$  ไปยัง  $B$  แล้วจะได้ว่า  $D_{f^{-1}} = R_f$  และ  $R_{f^{-1}} = D_f$

การพิสูจน์ ให้  $b \in D_{f^{-1}}$  จะได้ว่ามี  $a \in A$  ที่ซึ่ง  $(b, a) \in f^{-1}$  ดังนั้น  $(a, b) \in f$  นั่นคือ

$b \in R_f$  จึงได้ว่า  $D_{f^{-1}} \subseteq R_f$  และถ้าให้  $b \in R_f$  แล้วจะมี  $a \in A$  ที่ซึ่ง  $(a, b) \in f$  ดังนั้น  $(b, a) \in f^{-1}$  นั่นคือ  $b \in D_{f^{-1}}$  ดังนั้น  $R_f \subseteq D_{f^{-1}}$  สรุปได้ว่า  $D_{f^{-1}} = R_f$  พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า  $R_{f^{-1}} = D_f$

**ตัวอย่างที่ 3.22** จงหา  $D_f, R_f$  และ  $f^{-1}$  เมื่อกำหนดให้  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -\sqrt{x}\}$   
วิธีทำ จากการกำหนด  $f$  จะได้ว่า  $D_f = [0, \infty)$ ,  $R_f = (-\infty, 0)$  และ

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{y}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\} \end{aligned}$$

โดยที่  $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$  และ  $R_{f^{-1}} = [0, \infty)$

#### บทนิยาม 3.5.4

กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชันใด ๆ เรียก  $f^{-1}$  ว่าฟังก์ชันผกผัน ( inverse function ) ของ  $f$  ก็ต่อเมื่อ  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x - 3\}$  จะได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชัน และ  $f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y - 3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x+3}{2}\}$  เนื่องจาก  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชันผกผันของ  $f$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

(1) ถ้า  $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$  จะได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ  $f^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  เป็นฟังก์ชัน

(2) ถ้า  $g = \{(1, 2), (3, 4), (4, 5), (6, 2)\}$  แล้ว  $g$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และจะได้ว่า  $g^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (5, 4), (2, 6)\}$  ไม่เป็นฟังก์ชัน

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชันผกผันของ  $f$  ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

#### ทฤษฎีบท 3.5.2

กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชันใดๆ จะได้ว่า ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชันผกผันของ  $f$

**การพิสูจน์** สมมติให้  $(b, a_1) \in f^{-1}$  และ  $(b, a_2) \in f^{-1}$  ดังนั้น  $(a_1, b) \in f$  และ  $(a_2, b) \in f$  เนื่องจาก  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงได้ว่า  $a_1 = a_2$  ดังนั้น  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ  $f^{-1}$  เป็น

ฟังก์ชันผกผัน ของ  $f$

**ตัวอย่างที่ 3.23** จงหา  $f^{-1}$  และพิจารณาว่า  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชันผกผันของ  $f$  หรือไม่ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ดังนี้

$$f(x) = 3x - 2 \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

วิธีทำ เนื่องจาก  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x - 2\}$  ดังนั้น

$$f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 3y - 2\}$$

$$f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x+2}{3}\}$$

นั่นคือ  $f^{-1} = \frac{x+2}{3}$  สำหรับทุก  $x \in \mathbb{R}$  สมมติให้  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  โดยที่  $f(x_1) = f(x_2)$  จะได้ว่า  $3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$  นั่นคือ  $x_1 = x_2$  แสดงว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยทฤษฎีบท 1.4.2 จะได้ว่า  $f^{-1}$  เป็นฟังก์ชันผกผันของ  $f$

#### บทนิยาม 3.5.5

กำหนดให้  $A, B$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ  $f : A \rightarrow B$  ถ้า  $S \subseteq A$  แล้ว ภาพ (image) ของ  $S$  ภายใต้  $f$  ซึ่งเขียนแทนด้วย  $f(S)$  นิยามดังนี้  $f(S) = \{f(a) \mid a \in S\} \subseteq B$  และถ้า  $T \subseteq B$  แล้วภาพผกผัน (inverse image) ของ  $T$  ภายใต้  $f$  ซึ่งเขียนแทนด้วย  $f^{-1}(T)$  นิยามดังนี้  $f^{-1}(T) = \{a \mid f(a) \in T\} \subseteq A$  นอกจากนี้ ถ้า  $S = \{x\} \subseteq A$  แล้วเขียน  $f(x)$  แทน  $f(S)$  แล้วถ้า  $T = \{y\} \subseteq B$  เขียนแทนด้วย  $f^{-1}(y)$  แทน  $f^{-1}(T)$

จากบทนิยาม 3.5.5 จะเห็นว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ  $f^{-1}(b)$  ประกอบด้วยสมาชิกอย่างมากที่สุดหนึ่งตัวสำหรับทุก  $b \in B$  และ  $f$  เป็นฟังก์ชันทั่วถึง  $B$  ก็ต่อเมื่อ  $f^{-1}(b)$  ไม่เป็นเซตว่างสำหรับทุก  $b \in B$

สำหรับเนื้อหาที่กล่าวมาทั้งหมดในบทนี้ แบ่งเป็นสองส่วนใหญ่ๆ คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งศึกษาทั้งคุณสมบัติ ทฤษฎี มีความกว้างของเนื้อหา และอีกส่วนคือ ฟังก์ชันที่สร้างมาจากความสัมพันธ์ ศึกษาทั้งโดเมน เรนจ์ การดำเนินการของฟังก์ชัน รวมถึงฟังก์ชันที่ถูกนิยมนำมาใช้บ่อยๆ เช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น ซึ่งถูกนำไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวางและหลากหลายสาขา ประยุกต์ใช้ในการทำงานทั้งทางด้านพาณิชยศาสตร์ ด้านวิศวกรรม ด้านคอมพิวเตอร์ ฯลฯ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ในเรื่องอื่นๆ เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม แคลคูลัส เป็นต้น รวมถึงขยายพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูง ทั้งพีชคณิตนามธรรม พีชคณิตเชิงเส้น แคลคูลัสขั้นสูง การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ ทฤษฎีกราฟ ทฤษฎีรหัส เป็นต้น จึงถือว่าเป็นอีกหนึ่งเรื่องพื้นฐานที่อีกหลายสาขาวิชาต้องเรียนรู้และทำความเข้าใจ

## แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้เราสามารถสรุปผลอย่างไรได้บ้าง

$$1.1 \quad (x, 4) = (3, y)$$

$$1.2 \quad (x, 6) = (y, 6)$$

$$1.3 \quad (x, 2) \neq (x, y)$$

$$1.4 \quad (x, 5) \neq (2, y)$$

2. กำหนดให้  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  และ  $C = \{1, 2\}$  จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

$$2.1 \quad A \times (B \cup C)$$

$$2.2 \quad (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$2.3 \quad A \times (B \cap C)$$

$$2.4 \quad (A \times B) \cap (A \times C)$$

3. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$3.1 \quad y = 5x$$

$$3.2 \quad y = x^2 + 1$$

$$3.3 \quad y = \sqrt{x}$$

$$3.4 \quad y = |x|$$

4. จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์และอินเวอร์สของความสัมพันธ์

$$4.1 \quad \{(1, 2), (2, 3), (3, 8), (5, 4)\}$$

$$4.2 \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 1\}$$

$$4.3 \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y + x = 2\}$$

$$4.4 \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

$$4.5 \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq 2x\}$$

5. ฟังก์ชัน  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  กำหนดโดย  $f(x) = x^2 + x - 2$  จงหา

5.1  $f(3)$

5.2  $f(-3) - f(2)$

5.3  $f(x - 2)$

5.4  $f(f(-2))$

5.5  $f(x + h)$

6. กำหนดให้  $f(x) = 3x + 2$  และ  $g(x) = 2x$  จงหา

6.1  $(f + g)(2)$

6.2  $(f - g)(6)$

6.3  $fg(-1)$

6.4  $\frac{f}{g}\left(\frac{1}{2}\right)$

7. กำหนดให้  $f(x) = 2x - 3$  และ  $g(x) = 2x^3 - 1$  จงหา

7.1  $f \circ g$

7.2  $g \circ f$

7.3  $f \circ f$

7.4  $g \circ g$

## เอกสารอ้างอิง

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัณฑิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว
- ยุวณิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ**. เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่
- สุนทร แสงผล และ ก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
- ปยุตยา พัฒนangk. (2555). **พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

### เนื้อหาประจำบท

1. ความหมายและความรู้เบื้องต้นของเมตริกซ์
2. การดำเนินการของเมตริกซ์
3. สมบัติของเมตริกซ์

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. บอกสัญลักษณ์ของเมตริกซ์ การเท่ากัน การบวก ลบ และคูณด้วยสเกลาร์ได้
2. หาผลคูณของเมตริกซ์กับเมตริกซ์ พร้อมทั้งบอกสมบัติเกี่ยวกับการบวก และการคูณของเมตริกซ์กับเมตริกซ์
3. หาดีเทอร์มิแนนต์และสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์และนำไปใช้ได้
4. หาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

### วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
  - 1.1 ความหมายและความรู้เบื้องต้นของเมตริกซ์
  - 1.2 การดำเนินการของเมตริกซ์
  - 1.3 คุณสมบัติของเมตริกซ์
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
  - 2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์
  - 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

### สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ
2. Slide Presentation

### การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก การโต้ตอบและการซักถาม
2. แบบทดสอบ

3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

## บทที่ 4

### เมทริกซ์

เมทริกซ์ (Matrix) เป็นกลุ่มของจำนวนที่เรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยม ภายในเครื่องหมายวงเล็บ ( ) หรือ [ ] เราศึกษาเรื่องเมทริกซ์เพื่อช่วยใน การแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร ซึ่งสามารถทำได้ง่ายกว่าเมื่อต้องแก้ระบบสมการที่มีชุดสมการจำนวนมาก อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์อีกด้วย

#### 4.1 ความหมายและความรู้เบื้องต้นของเมทริกซ์

เมทริกซ์ หมายถึง กลุ่มของจำนวนซึ่งเรียงกันเป็นแถวๆ แลวละเท่าๆกันภายในเครื่องหมาย

[...] เช่น  $[5]$ ,  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  เป็นต้น

ข้อตกลง

1. นิยมใช้อักษร  $A, B, C, \dots$  เป็นชื่อเมทริกซ์
2. จำนวนแต่ละจำนวนที่อยู่ภายใน [...] เรียกว่า สมาชิกของเมทริกซ์
3. จำนวนที่ประกอบกันเป็นแนวนอนแต่ละแนว เรียกว่า แถว (Row)
4. จำนวนที่ประกอบกันเป็นแนวตั้งแต่ละแนว เรียกว่า หลัก (Column)
5. จำนวนแถวคูณจำนวนหลักเรียกว่า มิติ (Dimension) ของเมทริกซ์ หรือเรียกว่า ขนาดของเมทริกซ์

จากที่กล่าวมาเราสามารถเขียนเมทริกซ์ใดๆ ได้เป็น  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  หรือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

จะเห็นว่า  $a_{ij}$  เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ในหลักที่  $i$  และแถวที่  $j$  นอกจากนี้ยังมีขนาดของเมทริกซ์เป็น  $m \times n$

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดเมทริกซ์  $A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$  จงหา

1. ขนาดของเมทริกซ์
2. สมาชิกในหลักที่ 1
3. สมาชิกในแถวที่ 3

วิธีทำ

1. เนื่องจากเป็นเมทริกซ์ที่มี 4 แถวและ 4 หลักดังนั้นขนาดของเมทริกซ์เท่ากับ  $4 \times 4$
2. สมาชิกในหลักที่ 1 คือ  $-5, 0, 4, -2$
3. สมาชิกในแถวที่ 3 คือ  $4, 5, 6, 7$

นอกเหนือไปจากการพิจารณาขนาด และสมาชิกในเมตริกซ์แล้ว ยังจำเป็นต้องเรียนรู้เมทริกซ์ชนิดต่างๆที่นิยมใช้ ดังนี้

1. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix) คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์หมด ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย  $0$  เช่น

$$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

2. เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix) คือเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

3. เมทริกซ์เฉียง (Diagonal matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกแนวเส้นทแยงมุมหลัก (Main diagonal) เป็นจำนวนจริงใดๆ ส่วนสมาชิกนอกนั้นเป็นศูนย์หมดทุกตัว เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นเลข 1 ทั้งหมดส่วนสมาชิกนอกแนวนี้เป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมบัติว่า  $a_{ij} = a_{ji}$  เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

6. เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew-symmetric matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมบัติว่าสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมดและ  $a_{ij} = -a_{ji}$  เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

7. เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกที่อยู่ด้านบนหรือด้านล่างของแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมดเช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -8 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

8. เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทุกตัว ส่วนสมาชิกนอกนั้นเป็นศูนย์หมดทุกตัว เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**บทนิยาม 4.1.1**

เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใด ๆ จะเท่ากันได้ ก็ต่อเมื่อ

1. มิติของเมทริกซ์ทั้งสองเท่ากัน
2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน

**ตัวอย่างที่ 4.2** จงหาค่าของ  $x, y$  จากสมการต่อไปนี้

$$1. \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x^2 + 1 \\ y + 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 4 & x + y \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y & 8 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & x^2 + 2x - 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

**วิธีทำ**

$$1. \text{ จาก } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x^2 + 1 \\ y + 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } x^2 + 1 = 5 \text{ และ } y + 1 = 6$$

นั่นคือ  $x = \pm 2, y = 5$

$$2. \text{ จาก } \begin{bmatrix} 4 & x + y \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y & 8 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } x + y = 8 \text{ และ } x - y = 4$$

แก้สมการสองตัวแปร จะได้  $x = 6, y = 2$

$$3. \text{ จาก } \begin{bmatrix} 1 & x^2 + 2x + 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } x^2 + 2x + 5 = 4 \text{ นั่นคือ}$$

$x^2 + 2x + 1 = 0$  ดังนั้น  $x = -1$

## 4.2 การดำเนินการของเมทริกซ์

### 4.2.1 การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

**บทนิยาม 4.2.1**

ให้  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง แล้ว  $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & -6 & 7 \\ -8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$  จงหา  $2A$  และ  $-3A$

วิธีทำ

$$1. 2A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 6 \\ 8 & -12 & 14 \\ -16 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2. -3A = \begin{bmatrix} -6 & -15 & -9 \\ -12 & 18 & -21 \\ 24 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

#### 4.2.2 การบวกและลบเมทริกซ์

##### บทนิยาม 4.2.2

เมทริกซ์ใดๆ จะบวกหรือลบกันได้ ก็ต่อเมื่อ

1. มิติของเมทริกซ์ทั้งสองเท่ากัน
2. สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่านั้นจึงบวกกันหรือลบกันได้

นั่นคือ ถ้า  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  และ  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  แล้ว

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \text{ และ } A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$  และ  $C = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$

จงหา  $A + 2B$ ,  $(A + B) - C$ ,  $(2A + B) + (3B - 2C)$  และ  $A - (B - C)$

วิธีทำ

$$1. A + 2B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 13 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}(A + B) - C &= \left( \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(2A + B) + (3B - 2C) &= \left( 2 \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \right) + \left( 3 \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \right) \\&= \left( \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \right) + \left( \begin{bmatrix} -9 & 15 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -10 & -16 \end{bmatrix} \right) \\&= \begin{bmatrix} -11 & 11 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 7 & 37 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} -20 & 14 \\ 10 & 42 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 A - (B - C) &= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -16 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

#### คุณสมบัติการบวกของเมทริกซ์

กำหนดให้  $A, B, C$  เป็นเมทริกซ์ที่สามารถบวกกันได้

1.  $A + B = B + A$  (สลับที่ของการบวก)
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (เปลี่ยนกลุ่มภายใต้การบวก)
3.  $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$  (เอกลักษณ์การบวก)
4.  $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$  (อินเวอร์สการบวก)
5. ถ้า  $A + B = \underline{0}$  แล้ว  $A = -B$
6.  $A + B = A + C$  แล้ว  $B = C$  (ตัดออกสำหรับการบวก)

### 4.2.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

#### บทนิยาม 4.2.3

เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใดๆ จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ

1. จำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวแรกเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวที่สอง
2. ผลคูณของเมทริกซ์แต่ละตำแหน่งจะเท่ากับผลบวกของการคูณแต่ละ

แถวในตัวหน้าคูณกับหลักในตัวหลัง นั่นคือ ถ้า  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  และ  $B = [b_{ij}]_{n \times k}$  แล้ว

$$A \times B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i3} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i2} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i3} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i2} & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i3} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ik} \end{bmatrix}_{m \times k}$$

หมายเหตุ หากกำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ  $m \times n$  และ  $B$  เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ  $n \times k$  ถ้า  $C$  เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจาก  $A \times B$  แล้ว  $C$  จะมีมิติเป็น  $m \times k$  นั่นคือ  $A_{m \times n} \times B_{n \times k} = C_{m \times k}$

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  จงหา  $A \times B$  และ  $B \times A$

วิธีทำ

1.

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.  $B \times A$  ไม่สามารถหาค่าได้ เนื่องจากจำนวนหลักของ  $B$  ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ  $A$

ตัวอย่างที่ 4.6 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  จงหา  $A \times B$  และ  $B \times A$

วิธีทำ

1.

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 B \times A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### สมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า  $A, B$  และ  $C$  เป็นเมทริกซ์ที่สามารถคูณกันได้และ  $k$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1.  $AI = IA = A$  เมื่อ  $I$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ (เอกลักษณ์การคูณ)
2.  $k(AB) = (kA)B$
3.  $(AB)C = A(BC)$  (เปลี่ยนกลุ่มได้ของการคูณ)
4.  $A(B + C) = AB + AC$  (แจกแจงทางซ้าย)
5.  $(B + C)A = BA + CA$  (แจกแจงทางขวา)
6.  $(kA)^n = k^n A^n$

### 4.3 ทรานสโพสของเมทริกซ์

#### บทนิยาม 4.3.1

ทรานสโพสของเมทริกซ์  $A$  เขียนแทนด้วย  $A^t$  ซึ่งถ้า  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  แล้ว  $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

จงหา  $(A+B)^t$ ,  $A^t + B^t$ ,  $(AB)^t$ ,  $B^t A^t$  และ  $(A^t)^t$

วิธีทำ

$$1. (A+B)^t = \left( \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \right)^t = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2. A^t + B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3. (AB)^t = \left( \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \right)^t = \begin{bmatrix} 7 & -22 \\ -19 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 7 & -19 \\ -22 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4. B^t A^t = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -19 \\ -22 & -2 \end{bmatrix}$$

$$5. (A^t)^t = \left( \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^t \right)^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**คุณสมบัติของทรานสโพสของเมทริกซ์**

กำหนดให้  $A, B$  เป็นเมทริกซ์ใดๆ และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$1. (A^t)^t = A$$

$$2. (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$3. (cA)^t = cA^t$$

$$4. (AB)^t = B^t A^t$$

$$5. (A^m)^t = (A^t)^m \text{ เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

**บทนิยาม 4.3.2**

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัส ที่ทรานสโพสของเมทริกซ์จะเท่ากับเมทริกซ์เดิม

ตัวอย่างที่ 4.8 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  จงหาเมทริกซ์สมมาตรที่เกิดจาก  $A$

วิธีทำ จากคุณสมบัติ  $A + A^t$  จะได้เมทริกซ์สมมาตร นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

**4.4 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)****บทนิยาม 4.4.1**

กำหนด  $A$  เป็นเมทริกซ์ดีเทอร์มิแนนต์ของ  $A$  เขียนแทนด้วย  $\det(A)$  หรือ  $|A|$  ซึ่ง

$$1. \text{ ถ้า } A \text{ เป็นเมทริกซ์ขนาด } 2 \times 2 \text{ แล้ว } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  แล้ว

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

**ตัวอย่างที่ 4.9** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$  จงหา  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ ,  $\det(A) \det(B)$  และ  $\det(AB)$

วิธีทำ

$$1. \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -11$$

$$2. \det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 7 = -22$$

$$3. \det(A) \det(B) = -11 \cdot -22 = 242$$

$$4. \det(AB) = \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 23 & 19 \\ 49 & 51 \end{bmatrix} = 1,173 - 931 = 242$$

**ตัวอย่างที่ 4.10** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$  จงหาค่าของ  $\det(A)$

วิธีทำ

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = ((-3) + 0 + (-4)) - ((-3) + 4 + 0) = (-7) - 1 = -8$$

**ตัวอย่างที่ 4.11** กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์มิติ  $2 \times 2$  และ  $\det(A) = 4$  ถ้า  $I$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ และ  $A - 3I$  เป็นเมทริกซ์เอกฐานแล้ว  $\det(A + 3I)$  เท่ากับข้อใด

วิธีทำ จากที่กำหนดให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ  $2 \times 2$

$$\text{จึงสมมติให้ } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ จะได้ } \det(A) = ad - bc$$

$$\text{โจทย์กำหนดให้ } \det(A) = 4 \text{ จะได้ } ad - bc = 4 \quad (1)$$

$$\text{พิจารณา } A - 3I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-3 & b \\ c & d-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \det(A - 3I) &= (a-3)(d-3) - bc \\ &= ad - 3a - 3d + 9 - bc \\ &= (ad - bc) - 3(a + d) + 9 \end{aligned}$$

จาก  $A - 3I$  เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

$$\text{ทำให้ } \det(A - 3I) = 0 \text{ จึงได้} \quad (ad - bc) - 3(a + d) + 9 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่าจาก (1) ใน (2);} \quad & 4 - 3(a + d) + 9 = 0 \\ & 3(a + d) = 13 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad A + 3I &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+3 & b \\ c & d+3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \det(A + 3I) &= (a + 3)(d + 3) - bc \\ &= ad + 3a + 3d + 9 - bc \\ &= (ad - bc) + 3(a + d) + 9 \\ &= 4 + 13 + 9 \quad (\because \text{จาก (1) และ (3)}) \\ &= 26 \end{aligned}$$

#### บทนิยาม 4.4.2

กำหนดให้  $A = [a_{ij}]$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ  $n \times n$  โดยที่  $n \geq 2$

1. ไมเนอร์ของ  $a_{ij}$  คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  ของเมทริกซ์  $A$
2. ไมเนอร์ของ  $a_{ij}$  เขียนแทนด้วย  $M_{ij}$  ถ้านำทุกไมเนอร์ของ  $a_{ij}$  มาเขียนรวมเป็นเมทริกซ์จะแทนด้วยสัญลักษณ์  $M(A)$

$$\text{ตัวอย่างที่ 4.12} \quad \text{กำหนดให้ } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ จงหา } M(A)$$

วิธีทำ

$$M(A) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -6 & -5 & 7 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

#### บทนิยาม 4.4.3

กำหนดให้  $A = [a_{ij}]$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ  $n \times n$  โดยที่  $n \geq 2$

1. โคแฟกเตอร์ของ  $a_{ij}$  เขียนแทนด้วย  $C_{ij}$  ถ้านำทุกโคแฟกเตอร์ของ  $a_{ij}$  มาเขียนเป็นเมทริกซ์จะแทนด้วยสัญลักษณ์  $C(A)$
2. โคแฟกเตอร์ของ  $a_{ij}$  แต่ละตำแหน่ง คือ  $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

ตัวอย่างที่ 4.13 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$  จงหา  $C(A)$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ผ่านมา

$$C(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}M_{11} & (-1)^{1+2}M_{12} & (-1)^{1+3}M_{13} \\ (-1)^{2+1}M_{21} & (-1)^{2+2}M_{22} & (-1)^{2+3}M_{23} \\ (-1)^{3+1}M_{31} & (-1)^{3+2}M_{32} & (-1)^{3+3}M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 6 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์โดยใช้โคแฟกเตอร์

1. เลือกสมาชิกแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ  $A$  แล้วหาโคแฟกเตอร์แต่ละตัวในแถวหรือหลักนั้นซึ่งโดยทั่วไปนิยมใช้แถวหรือหลักที่มีเลขศูนย์มากที่สุด
2. เอาสมาชิกแต่ละตัวในแถวหรือหลักนั้นคูณกับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกแต่ละตัวในแถวหรือหลักนั้น แล้วนำผลคูณที่ได้มาบวกกัน ผลบวกที่ได้คือค่าของ  $\det(A)$

**ตัวอย่างที่ 4.14** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$  จงหาค่าของ  $\det(A)$  โดยใช้โคแฟกเตอร์

*วิธีทำ* เราสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้วิธีของเมตริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  จากตัวอย่างที่ผ่านมา คือ

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = ((-3) + 0 + (-4)) - ((-3) + 4 + 0) = (-7) - 1 = -8$$

เราสามารถใช่วิธีโคแฟกเตอร์ตามขั้นตอน

1. เลือกแถวที่ 1 เนื่องจากมี 0 ปรากฏมากที่สุด คือ 1, 0, -1

$$2. \text{ หาค่าของ } C_{11}, C_{12}, C_{13} \text{ นั่นคือ } C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}, C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{และ } C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ จะได้ว่า } C_{11} = -7, C_{12} = 12, C_{13} = 1 \text{ ดังนั้น}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 1(-7) + 0(12) + (-1)(1) = -7 - 1 = -8$$

คุณสมบัติและทฤษฎีบทเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์ที่ควรทราบ

1. ถ้า  $A = B$  แล้ว  $\det(A) = \det(B)$
2.  $\det(A) = \det(A^t)$
3.  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
4.  $\det(A^n) = (\det A)^n$
5.  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
6.  $\det(I) = 1$
7.  $\det(cA) = c^n \det(A)$  เมื่อ  $c$  เป็นจำนวนจริงและ  $A$  มีมิติเป็น  $n \times n$
8. ถ้า  $A$  มีสมาชิกแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทุกตัวแล้ว  $\det(A) = 0$
9. ถ้า  $A$  มีสมาชิกในแถวสองแถวหรือหลักสองหลักใดซ้ำกันแล้ว  $\det(A) = 0$

10. ถ้า  $B$  เป็นเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจาก  $A$  โดยการสลับที่กันระหว่างแถวคู่ใดคู่หนึ่งหรือหลักคู่ใดคู่หนึ่งเพียงคู่เดียวแล้ว  $\det(B) = -\det(A)$
11. ถ้าคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ  $A$  ด้วยค่าคงตัว  $c$  แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ใหม่คือ  $c \cdot \det(A)$
12. ถ้าเปลี่ยนแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ  $A$  โดยใช้ค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ คูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ  $A$  แล้วนำไปบวกกับสมาชิกในแถวหรือหลักที่ต้องการเปลี่ยนนั้น โดยการบวกสมาชิกในลำดับเดียวกันเข้าด้วยกัน แล้วใช้ผลบวกแทนที่สมาชิกเดิม (Row Operation) แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ใหม่จะเท่ากับ  $\det(A)$

#### 4.5 อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

##### บทนิยาม 4.5.1

กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  จะได้ว่า  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  โดยที่  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

หมายเหตุ

1. ถ้า  $ad - bc \neq 0$  สามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ได้เรียกเมทริกซ์ดังกล่าวว่านอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ (non-singular matrix)
2. ถ้า  $ad - bc = 0$  ไม่สามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ได้เรียกเมทริกซ์ดังกล่าวว่าซิงกูลาร์เมทริกซ์ (singular matrix)

**ตัวอย่างที่ 4.15** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$  จงหา  $(AB)^{-1}, B^{-1}A^{-1}$

และ  $(2A)^{-1}$

วิธีทำ 1. 
$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= \left( \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 23 & 37 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{23 \cdot (-8) - (-5) \cdot 37} \begin{bmatrix} -8 & -37 \\ 5 & 23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -8 & -37 \\ 5 & 23 \end{bmatrix} \\
2. \quad B^{-1}A^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \left( \frac{1}{-10+9} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \left( \frac{1}{4-5} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & -37 \\ 5 & 23 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(2A)^{-1} &= \left( 2 \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{8 \cdot 2 - (-2) \cdot (-10)} \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**บทนิยาม 4.5.2**

ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์มิติ  $3 \times 3$  แล้ว  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$  โดยที่  $\text{adj}(A) = C(A)^t$  และเราเรียก  $\text{adj}(A)$  ว่าเมทริกซ์ผกผัน

ตัวอย่างที่ 4.16 กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  จงหา  $A^{-1}$

วิธีทำ จากวิธีการหาโคแฟกเตอร์จะได้ว่า  $C(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ดังนั้น

$$\text{adj}(A) = C(A)^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เราสามารถหา } \det(A) = 1 \cdot C_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4.17 ถ้า  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$  และ  $A^2 - 7A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$  จงหาค่าของ  $x$

วิธีทำ จาก 
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$$

จะได้ 
$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x & 7 \\ 7x & x+25 \end{bmatrix}$$

จากโจทย์กำหนด 
$$A^2 - 7A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

จะได้ 
$$\begin{bmatrix} 4+x & 7 \\ 7x & x+25 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4+x & 7 \\ 7x & x+25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7x & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-10 & 0 \\ 0 & x-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

จากการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ว่า  $x-10 = -7$  นั่นคือ  $x = 3$

**ตัวอย่างที่ 4.18** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  แล้วค่าของ  $\det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{50})$  เท่ากับ

เท่าไร

วิธีทำ จาก

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$A^{50} = A^{49}A = \begin{bmatrix} 1 & 98 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{50} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 2+4+6+8+\dots+100 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \det(A+A^2+A^3+\dots+A^{50}) &= (50)(50)-(0)(2+4+6+8+\dots+100) \\ &= 2,500 - 0 = 2,500\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 4.19** กำหนดให้  $a, b$  เป็นจำนวนจริง และ  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า  $(A+B)^2 - 2AB = A^2 + B^2$  แล้ว  $\text{adj}(A)$  เท่ากับเท่าไร

**วิธีทำ** จาก  $(A+B)^2 - 2AB = A^2 + B^2$

$$(A+B)(A+B) - 2AB = A^2 + B^2$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 - 2AB = A^2 + B^2$$

$$-AB + BA = 0$$

$$BA = AB \quad (1)$$

แทน  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  ใน (1) จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & a-3b \\ 5 & 2a+3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2a & -3+3a \\ 1+2b & -3+3b \end{bmatrix}$$

$$\text{จากการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้} \quad -2 = 1+2a \quad (2)$$

$$a-3b = -3+3a \quad (3)$$

$$5 = 1+2b \quad (4)$$

$$2a+3b = -3+3b \quad (5)$$

$$\text{จาก (2) ;} \quad a = -\frac{3}{2}$$

$$\text{จาก (4) ;} \quad b = 2$$

ซึ่ง  $a = -\frac{3}{2}$  และ  $b = 2$  นั้นสอดคล้องกับ (3) และ (5) ด้วย

ดังนั้น 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้ 
$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left( \because \text{ ถ้า } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ แล้วจะได้ } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)$$

**ตัวอย่างที่ 4.20** ถ้า  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -x & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\det(A) = 1$  และโคแฟกเตอร์ของ

$a_{21} = -3$  แล้ว  $\det(A + I)$  เท่ากับเท่าไร (เมื่อ  $I$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด  $3 \times 3$ )

วิธีทำ จาก 
$$A = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -x & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ 
$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ -1 & -x \end{vmatrix} \\ &= 2x - y \end{aligned}$$

โจทย์กำหนดให้  $\det(A) = 1$

นั่นคือ  $2x - y = 1 \quad (1)$

และจาก  $C_{21}(A) = (-1)^{2+1}M_{21}(A) = (-1)^3 \begin{vmatrix} y & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = (-1)(y - 0) = -y$

โจทย์กำหนดให้  $C_{21}(A) = -3$

นั่นคือ  $-y = -3$

$\therefore y = 3$  แทนค่า  $y = 3$  ใน (1);  $2x - 3 = 1$

$\therefore x = 2$  จะได้ 
$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \det(A + I) &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 18 - 6 = 12 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 4.21** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  ถ้า  $B$  เป็นเมทริกซ์ที่  $B = 2A^{-1}$  จงหาค่าของ  $\det(3\text{adj}(B))$

วิธีทำ จาก

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } \det(A) = 1 + 2 = 3$$

และจาก

$$B = 2A^{-1}$$

จะได้

$$\det(B) = \det(2A^{-1}) = 4 \left( \frac{1}{\det(A)} \right) = 4 \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

จากความรู้ที่ว่า  $\det(\text{adj}(A)) = [\det(A)]^{n-1}$  เมื่อ  $A$  มีมิติ  $n \times n$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \det(3\text{adj}(B)) &= 3^2 \det(\text{adj}(B)) \\ &= 9 [\det(\text{adj}(B))]^{2-1} \quad (\because B \text{ มีมิติ } 2 \times 2) \end{aligned}$$

$$= 9 \det(B) = 9 \left( \frac{4}{3} \right) = 12$$

**ตัวอย่างที่ 4.22** ให้  $x, y, z$  เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 2$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 1$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

$$\text{ถ้า } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

แล้วค่าของ  $x + y + z$  เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้นำมาเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{สมมติให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{นั่นคือ } A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นำ  $A^{-1}$  มาคูณทางซ้ายทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$A^{-1}A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{จากที่กำหนดให้ } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{เทียบกับ } \begin{bmatrix} A & : & I \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I & : & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{แสดงว่า } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ นำไปแทนใน (1) จะได้ว่า}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ  $x = 1, y = -2$  และ  $z = 7$

ดังนั้น  $x + y + z = 1 + (-2) + 7 = 6$

จากเนื้อหาที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นว่าความหมายและความรู้เบื้องต้นของเมทริกซ์ เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาการดำเนินการต่างๆ ทั้งการบวก ลบ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ รวมถึงการคูณกันของเมทริกซ์ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษา การหาอินเวอร์ส การคูณของเมทริกซ์อีกด้วย

เมทริกซ์ เป็นเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ใช้สำหรับแก้ระบบสมการเชิงเส้น รวมถึงการแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์ แต่การจะนำไปใช้ได้นั้น จะต้องศึกษาการดำเนินการต่างๆ ของเมทริกซ์ การหาดีเทอร์มิแนนต์ ไมเนอร์ โคแฟกเตอร์ แอดจอย จนได้เมทริกซ์อินเวอร์ส แล้วนำไปดำเนินการแก้ปัญหา ดังนั้นบทนี้จะมีประโยชน์มาก โดยเฉพาะสาขาวิชาทางด้านคอมพิวเตอร์ รวมถึงผู้ต้องการศึกษาทางการแก้ปัญหาเชิงเส้นโดยเฉพาะ

## แบบฝึกหัดท้ายบท

1. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix}$  และ  $C = 2A + \frac{1}{2}B$  แล้วจงหา

ค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1  $C_{13} + C_{31}$

1.2  $C_{21} + C_{23}$

2. ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$  และ  $3A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ  $(A + I_2)$

3. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  จงหาเมทริกซ์  $X$  แต่ละข้อต่อไปนี้

3.1  $X + 2B = A$

3.2  $2X - A = 3B$

4. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$  จงหาเมทริกซ์  $X$  ที่ทำให้  $2(A + X) = \frac{1}{2}A$

5. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  ถ้า  $AB = C$  แล้วจงหาค่าของ  $C_{23} + C_{34}$

6. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  จงหาเมทริกซ์  $A^2 - 4A - 5I$

7. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} x & -1 & x^2 \\ y^2 & 1 & 3 \\ 3 & x^2 & y \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  และ  $A + A^t = 2B$  แล้ว จง

หาค่าของ  $x + y$

8. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  และ  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ถ้า  $AX + B = A$  จงหา  $b + c$

9. จงหาค่า  $x$  จากสมการเมตริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

9.1  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ x & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

9.2  $2 \begin{vmatrix} x & -3 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

10. ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และ  $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix}$  ถ้า  $C_{12}(A) = 1$  และ  $\det(A) = -5$  จงหาค่าของ  $a$

11. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$  จงหาค่าของ

11.1  $\det(A^t \text{adj}(B))$

11.2  $\det(BA^t \text{adj}(A))$

## เอกสารอ้างอิง

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัณฑิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. (2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว
- ยุวณิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ**. เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่
- สุนทร แสงผล และ ก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

### เนื้อหาประจำบท

1. สมบัติของจำนวนจริง
2. สมบัติความบริบูรณ์หรือสัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด
3. ทฤษฎีบทเศษเหลือ และตัวประกอบ
4. การไม่เท่ากันของจำนวนจริงและอสมการ
5. ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. จำแนกจำนวนจริงที่กำหนดให้ และยกตัวอย่างจำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ จำนวนเต็ม และจำนวนนับได้
2. หารากที่สองและรากที่สามของจำนวนเต็มโดยการแยกตัวประกอบและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ
3. บอกความเกี่ยวข้องของจำนวนจริงจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ ได้
4. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้
5. ใช้ความรู้ ทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม

### วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
  - 1.1 สมบัติของจำนวนจริง
  - 1.2 สมบัติความบริบูรณ์หรือสัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด
  - 1.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ และตัวประกอบ
  - 1.4 การไม่เท่ากันของจำนวนจริงและอสมการ
  - 1.5 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
  - 2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์
  - 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

### สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ

## 2. Slide Presentation

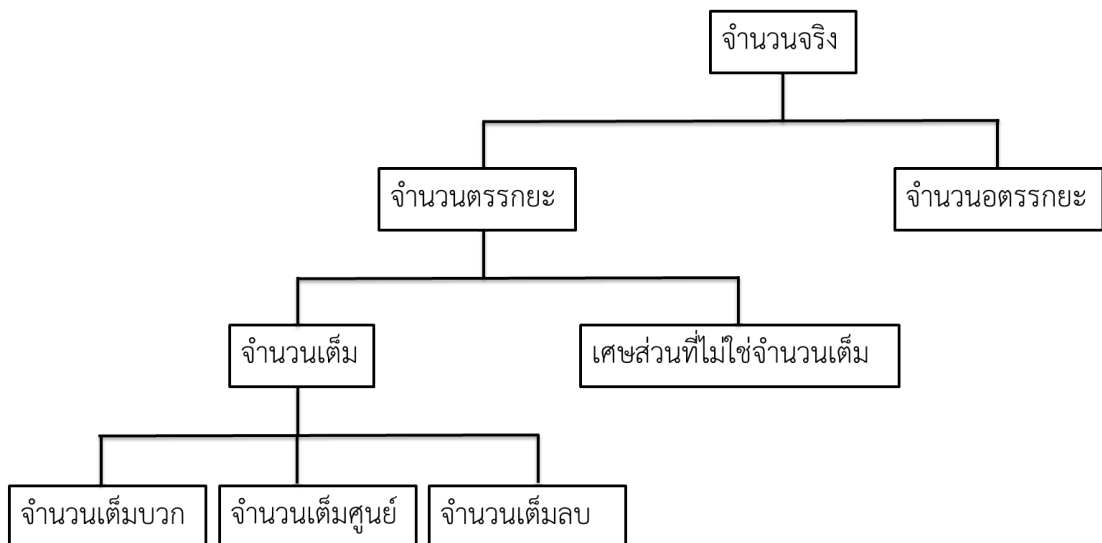
### การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก การโต้ตอบและการซักถาม
2. แบบทดสอบ
3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

## บทที่ 5

### จำนวนจริง

จำนวนที่มนุษย์คิดขึ้นใช้ครั้งแรกเป็นจำนวนที่ใช้ นับสิ่งของต่างๆ เรียกว่า จำนวนธรรมชาติ (Natural Number) หรือจำนวนนับ (Counting Number) ได้แก่  $1, 2, 3, 4, \dots$  ซึ่งสัญลักษณ์แทนเซตของจำนวนนับ คือ  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  หากนำจำนวนเหล่านี้มา บวกหรือคูณกัน ผลลัพธ์ย่อมเป็นจำนวนนับเสมอ เรียกว่า “เซต ของจำนวนนับมี สมบัติปิด สำหรับการบวกและการคูณ” (คำว่า สมบัติปิด หมายความว่า เมื่อนำ สมาชิกใดๆ ในเซตมาดำเนินการแล้ว ผลที่ได้ยังคงเป็นสมาชิกของเซตนั้น เช่นเดิม) แต่หากนำจำนวนนับ บางจำนวนมาลบหรือหารกันจะมีปัญหาขัดข้องเนื่องจากผลที่ได้ไม่เป็นจำนวนนับ ด้วยเหตุนี้จำนวนลบ จำนวนศูนย์ รวมทั้งจำนวน เศษส่วน (Fraction) จึงถูกคิดขึ้นมาใช้ ซึ่งสามารถจำแนกได้ตามแผนผัง



รูปที่ 5.1 แสดงแผนผังการสร้างจำนวนจริงจากจำนวนต่างๆ

จากแผนผังจะเห็นว่าจำนวนจริงเกิดจากจำนวนต่างๆ ซึ่งมีความหมาย ดังนี้

1. จำนวนตรรกยะ (Rational numbers ) คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูป  $\frac{a}{b}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มและ  $b \neq 0$  เช่น  $\frac{3}{4}, 0.25, 0.3$  เป็นต้น สามารถจำแนกได้เป็น 2 ประเภท คือ

- 1.1 เศษส่วนที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม เช่น  $\frac{3}{4}, 0.54, 1.5, 0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$  และ  $1.5 = 1\frac{5}{9}$  เป็นต้น

- 1.2 จำนวนเต็ม (Integers) ได้แก่  $1, -4, 5, 6, -5$  จำนวนเต็มแต่ละจำนวนสามารถเขียนในรูป  $\frac{a}{b}$  เมื่อ  $a$  คือจำนวนเต็มตัวนั้นและ  $b = 1$  เช่น  $4 = \frac{4}{1}$  แบ่งเป็น จำนวนเต็มบวก ได้แก่  $1, 2, 3, 4, \dots$  จำนวนเต็มลบ ได้แก่  $-1, -2, -3, -4, \dots$  และจำนวนเต็มศูนย์ (Zero) ได้แก่  $0$
2. จำนวนตรรกยะ (Rational numbers) คือ จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เช่น  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, 2.73773777377773 \dots$  เป็นต้น
3. จำนวนจริง คือ จำนวนตรรกยะรวมกับจำนวนอตรรกยะ

ข้อสังเกต

1.  $\sqrt{25}, \sqrt[3]{-8}$  เป็นจำนวนตรรกยะเพราะว่า  $\sqrt{25} = 5, \sqrt[3]{-8} = -2$
2.  $\sqrt[n]{x}$  เมื่อ  $n$  เป็นเลขคู่บวกและ  $x < 0$  ไม่เป็นจำนวนจริง เช่น  $\sqrt{-4}, \sqrt[4]{-16}$  ไม่เป็นจำนวนจริง แต่ถ้า  $x < 0$  และ  $n$  เป็นเลขคี่บวก  $\sqrt[n]{x}$  จะเป็นจำนวนจริง เช่น  $\sqrt[3]{-8}, \sqrt[3]{-4}, \sqrt[3]{-16}$  เป็นจำนวนจริง
3.  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$  เมื่อ  $n$  เป็นเลขคู่บวก เช่น  $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
4.  $\sqrt[n]{x^n} = x$  เมื่อ  $n$  เป็นเลขคี่บวก เช่น  $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

## 5.1 สมบัติของจำนวนจริง

นอกจากสมบัติปิดซึ่งได้รู้จักแล้ว ระบบจำนวนจริงยังมีสมบัติอีกหลายลักษณะที่ควรทราบ เนื่องจากเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับวิชาคณิตศาสตร์

สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

1. สมบัติสะท้อน (Reflexivity) ถ้า เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว  $a = a$
2. สมบัติสมมาตร (Symmetry) กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า  $a = b$  แล้ว  $b = a$
3. สมบัติถ่ายทอด (Transitivity) กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า  $a = b$  และ  $b = c$  แล้ว  $a = c$
4. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า  $a = b$  แล้ว  $a + c = b + c$

5. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า  $a = b$  แล้ว  $ac = bc$

สมบัติการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง

1. สมบัติปิด (Closed) ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว
  - 1.1 สมบัติปิดภายใต้การบวก  $a + b$  เป็นจำนวนจริง
  - 1.2 สมบัติปิดภายใต้การคูณ  $ab$  เป็นจำนวนจริง
2. สมบัติการสลับที่ (Commutativity) ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว
  - 2.1 สมบัติการสลับที่การบวก  $a + b = b + a$
  - 2.2 สมบัติการสลับที่การคูณ  $ab = ba$
3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associativity) ถ้า  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว
  - 3.1 สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวก  $(a + b) + c = a + (b + c)$
  - 3.2 สมบัติการเปลี่ยนหมู่การคูณ  $(ab)c = a(bc)$
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์ (identity element)
  - 4.1 สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก (Additive identity) จะมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง คือ 0 ซึ่งทำให้  $0 + a = a = a + 0$  โดยที่  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และเรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวกของจำนวนจริง
  - 4.2 สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ (Multiplicative identity) จะมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง คือ 1 ซึ่งทำให้  $1a = a = a1$  โดยที่  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และเรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณของจำนวนจริง
5. สมบัติการมีอินเวอร์ส (inverse element)
  - 5.1 สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมีจำนวนจริง  $-a$  ซึ่งทำให้  $a + (-a) = 0 = (-a) + a$  และเรียก  $-a$  ว่า “อินเวอร์สสำหรับการบวกของ  $a$ ”
  - 5.2 สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 จะมีจำนวนจริง  $a^{-1}$  ซึ่งทำให้  $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$  และเรียก  $a^{-1}$  ว่า “อินเวอร์สสำหรับการคูณของ  $a$ ”
6. สมบัติการแจกแจง (Distributivity) กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า  $a(b + c) = ab + ac$  และ  $(a + b)c = ac + bc$

7. สมบัติไตรวิภาค (Trichotomy) ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว  $a$  จะต้องเป็นอย่างใดอย่างหนึ่ง ใน 3 ข้อต่อไปนี้  $a < 0$  หรือ  $a = 0$  หรือ  $a > 0$

#### บทนิยาม 5.1.1

กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ เราจะสามารถนิยามการลบและการหารจำนวนจริง ดังนี้

1.  $a - b = a + (-b)$
2.  $\frac{a}{b} = a(b^{-1})$  โดยที่  $b \neq 0$

จากสมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง และสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณจำนวนจริงที่กล่าวมา ทำให้เกิดทฤษฎีบทต่างๆ ที่น่าสนใจดังต่อไปนี้

#### ทฤษฎีบท 5.1.1

กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า  $a + c = b + c$  แล้ว  $a = b$  (กฎการตัดออกทางขวาของการบวก)
2. ถ้า  $c + a = c + b$  แล้ว  $a = b$  (กฎการตัดออกทางซ้ายของการบวก)
3. ถ้า  $ac = bc$  แล้ว  $a = b$  (กฎการตัดออกทางขวาของการคูณ)
4. ถ้า  $ca = cb$  แล้ว  $a = b$  (กฎการตัดออกทางขวาของการคูณ)
5.  $a0 = 0 = 0a$
6.  $(-1)a = -a = a(-1)$
7. ถ้า  $ab = 0$  แล้ว  $a = 0$  หรือ  $b = 0$
8.  $a(-b) = -ab = (-a)b$
9.  $(-a)(-b) = ab$
10.  $(a^{-1})^{-1} = a$  เมื่อ  $a \neq 0$
11.  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$  เมื่อ  $a \neq 0$  และ  $b \neq 0$

**ตัวอย่างที่ 5.1** กำหนดให้  $x * y = x + y + 5$  เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จงหาอินเวอร์สของการ  $*$  ของ 8

**วิธีทำ** จากการนิยาม  $*$  สังเกตว่า

$$x * y = y * x$$

ดังนั้นเราพิจารณาข้างเดียวก็เพียงพอ

กำหนดให้  $e$  และ  $z$  เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่  $e * z = z = z * e$

จาก

$$z = e * z = e + z + 5$$

จะได้ว่า

$$e = -5$$

ดังนั้นเอกลักษณ์ของ  $*$  คือ  $-5$

ต่อไปเราจะดำเนินการหาอินเวอร์ส 8 ภายใต้การดำเนินการ  $*$

สมมติให้อินเวอร์สที่ต้องการ คือ  $m$

จะได้ว่า  $8 + m + 5 = 8 * m = -5$

ดังนั้น  $m = -18$

นั่นคืออินเวอร์สของ 8 ภายใต้การดำเนินการ  $*$  คือ  $-18$

**ตัวอย่างที่ 5.2** กำหนดให้  $x * y = \frac{x \cdot y}{2}$  เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จงหาอินเวอร์สของการ  $*$  ของ 6

*วิธีทำ* จากการนิยาม  $*$  สังเกตว่า  $x * y = y * x$

ดังนั้นเราพิจารณาข้างเดียวก็เพียงพอ

กำหนดให้  $e$  และ  $z$  เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่  $e * z = z = z * e$

จาก  $z = e * z = \frac{e \cdot z}{2}$

จะได้ว่า  $e = 2$

ดังนั้นเอกลักษณ์ของ  $*$  คือ 2

ต่อไปเราจะดำเนินการหาอินเวอร์ส 6 ภายใต้การดำเนินการ  $*$

สมมติให้อินเวอร์สที่ต้องการ คือ  $m$

จะได้ว่า  $\frac{6 \cdot m}{2} = 6 * m = 2$

ดังนั้น  $m = \frac{2}{3}$

นั่นคืออินเวอร์สของ 6 ภายใต้การดำเนินการ  $*$  คือ  $\frac{2}{3}$

## 5.2 สมบัติความบริบูรณ์หรือสัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด

### (The Axiom of Completeness)

ก่อนกล่าวถึงสมบัติความบริบูรณ์จะกล่าวถึง บทนิยามของค่าขอบเขตบนก่อน

#### บทนิยาม 5.2.1

ให้  $A \subset \mathbb{R}$  จำนวนจริง  $c$  จะเป็นค่าขอบเขตบนของ  $A$  ก็ต่อเมื่อ  $c$  มีค่าไม่น้อยกว่าสมาชิกแต่ละตัวของ  $A$  ถ้าหา  $c$  ได้ เรียก  $A$  ว่าเป็นเซตที่มีขอบเขตบน (Upper bound)

#### บทนิยาม 5.2.2

ให้  $B \subset \mathbb{R}$  จำนวนจริง  $d$  เป็นค่าขอบเขตล่างของ  $B$  ก็ต่อเมื่อ  $d$  มีค่าไม่มากกว่าสมาชิกแต่ละตัวของ  $B$  ถ้าหา  $d$  ได้ เรียก  $B$  ว่าเป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง (Lower bound)

**ตัวอย่างที่ 5.3** กำหนดให้  $A = \{1, 3, 5, 7\} \subset \mathbb{R}$

ค่าขอบเขตบนของ  $A$  คือ  $[7, \infty)$  เพราะว่าจำนวนจริงเหล่านี้ไม่น้อยกว่า 1, 3, 5, 7

ค่าขอบเขตล่างของ  $A$  คือ  $(-\infty, 1]$  เพราะว่าจำนวนจริงเหล่านี้ไม่มากกว่า 1, 3, 5, 7

#### บทนิยาม 5.2.3

ถ้า  $A \subset \mathbb{R}$  และ  $A$  มีค่าขอบเขตบนแล้ว  $A$  มีค่าขอบเขตบนน้อยที่สุด

#### บทนิยาม 5.2.4

ถ้า  $B \subset \mathbb{R}$  และ  $B$  มีค่าขอบเขตล่างแล้ว  $B$  มีค่าขอบเขตล่างมากที่สุด

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เซตขอบเขตบนของ  $A$  คือ  $[7, \infty)$  ดังนั้นค่าขอบเขตบนน้อยที่สุดคือ 7 และเซตขอบเขตล่าง  $A$  คือ  $(-\infty, 1]$  ดังนั้นค่าขอบเขตล่างมากที่สุดคือ 1 จะเห็นว่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างเป็นเซต แต่ค่าขอบเขตบนน้อยที่สุด (least upper bound) และขอบเขตล่างมากที่สุด (greatest lower bound) มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ข้อสังเกต

1. ค่าขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซตใด อาจจะเป็นสมาชิกของเซตนั้นหรือไม่ใช่สมาชิกของเซตนั้นก็ได้ ในทำนองเดียวกัน ค่าขอบเขตบนมากที่สุดของเซตใด อาจจะเป็นสมาชิกของเซตนั้นหรือไม่ใช่สมาชิกของเซตนั้นก็ได้

2. เซตใดๆ อาจไม่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่างหรือมีขอบเขตบนอย่างเดียวหรือขอบเขตล่างอย่างเดียวหรือมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่างก็ได้

### 5.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ และตัวประกอบ

พหุนามตัวแปรเดียว ที่มี  $x$  เป็นตัวแปร จะอยู่ในรูป  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  โดยที่  $a_i$  เป็นค่าคงที่ (สัมประสิทธิ์) และ  $n$  เป็นจำนวนนับ นิยมใช้สัญลักษณ์แทนพหุนามว่า  $p(x)$  นอกจากนั้น สัญลักษณ์  $p(c)$  หมายถึงการแทนค่าของ  $x$  ด้วยจำนวน  $c$  เช่น  $p(x) = 4x^3 - x^2 - 2x + 6$  จะได้ว่า  $p(-1) = 4(-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) + 6 = 3$

การแก้สมการพหุนามที่มีตัวแปรเดียว คือ  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  จะต้องแยกตัวประกอบให้สมการอยู่ในรูปผลคูณเท่ากับศูนย์ โดยมีเทคนิควิธีการต่างๆ ที่ศึกษาผ่านมาได้แก่ กำลังสอง สมบูรณ์ ผลต่างของกำลังสอง ผลบวกและผลต่างของกำลังสาม เป็นต้น แต่สำหรับ

สมการที่มีดีกรีมากกว่าสอง ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้แยกตัวประกอบสะดวกขึ้น

### ทฤษฎีบท 5.3.1

ถ้าหาร  $p(x)$  ด้วย  $x-c$  แล้ว จะเหลือเศษเท่ากับ  $p(c)$  และหากการหารนี้เหลือเศษ 0 พอดี จะกล่าวว่า  $x-c$  เป็นตัวประกอบของ  $p(x)$  นั่นคือ “พหุนาม  $p(x)$  จะมี  $x-c$  เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ  $p(c) = 0$ ”

**ตัวอย่างที่ 5.4** จงหาเศษจากการหารต่อไปนี้

1.  $x^2 - 6x + 8$  หารด้วย  $x - 1$
2.  $x^2 - 6x + 8$  หารด้วย  $x + 1$
3.  $8x^2 + 10x + 3$  หารด้วย  $2x - 3$
4.  $8x^2 + 10x + 3$  หารด้วย  $2x + 3$

**วิธีทำ**

1.  $x^2 - 6x + 8$  หารด้วย  $x - 1$  จะมีเศษเท่ากับ  $(1)^2 - 6(1) + 8 = 3$
2.  $x^2 - 6x + 8$  หารด้วย  $x + 1$  จะมีเศษเท่ากับ  $(-1)^2 - 6(-1) + 8 = 15$
3.  $8x^2 + 10x + 3$  หารด้วย  $2x - 3$  จะมีเศษเท่ากับ  $8(\frac{3}{2})^2 + 10(\frac{3}{2}) + 3 = 36$
4.  $8x^2 + 10x + 3$  หารด้วย  $2x + 3$  จะมีเศษเท่ากับ  $8(-\frac{3}{2})^2 + 10(-\frac{3}{2}) + 3 = 6$

**ตัวอย่างที่ 5.5** จงแสดงว่า  $x-3$  เป็นตัวประกอบของ  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  และแยกตัวประกอบของ  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

**วิธีทำ**

1. จาก  $(3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$  ดังนั้น  $x-3$  เป็นตัวประกอบของ  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
2. จาก  $(3)^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 0$ ,  $(2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 0$  และ  $(1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$  ดังนั้น  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-3)(x-2)(x-1)$

**ตัวอย่างที่ 5.6** กำหนดให้  $f(x) = x^3 + kx^2 + mx + 4$  เมื่อ  $k$  และ  $m$  เป็นค่าคงตัว ถ้า  $x - 2$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $f(x)$  และเมื่อนำ  $x + 1$  ไปหาร  $f(x)$  ได้เศษ 3 แล้วค่าสัมบูรณ์ของ  $k + m$  เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จากทฤษฎีบทเศษเหลือที่ว่า เศษที่ได้จากการหาร  $p(x)$  ด้วย  $x - c$  เท่ากับ  $p(c)$   
 และจากทฤษฎีบทตัวประกอบที่ว่า  $x - c$  เป็นตัวประกอบของ  $p(x)$  ก็ต่อเมื่อ  $p(c) = 0$

$$\text{จาก} \quad f(x) = x^3 + kx^2 + mx + 4$$

และ  $x - 2$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $f(x)$

$$\text{จะได้} \quad f(2) = 0$$

$$(2)^3 + k(2)^2 + m(2) + 4 = 0$$

$$4k + 2m = -12$$

$$2k + m = -6 \quad \text{.....(1)}$$

และ  $x + 1$  หาร  $f(x)$  ได้เศษเหลือ 3

$$\text{จะได้} \quad f(-1) = 3$$

$$(-1)^3 + k(-1)^2 + m(-1) + 4 = 3$$

$$k - m = 0 \quad \text{.....(2)}$$

$$(1) + (2); \quad 3k = -6$$

$$k = -2$$

แทนค่า  $k = -2$  ใน (2) จะได้  $m = -2$

$$\text{ดังนั้น } |k + m| = |-2 - 2| = 4$$

ตัวอย่างที่ 5.7 ให้  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ  $m, n$  เป็นจำนวนเต็ม ถ้า  $x + 3$  หาร  $x^3 + mx^2 + nx = p$  ลงตัว และ  $x - 1$  หาร  $x^3 = mn^2 + nx = p$  เหลือเศษ 4 แล้ว  $m$  และ  $n$  มีค่าเท่ากับเท่าไร  
 วิธีทำ ให้  $f(x) = x^3 + mn^2 + nx + p$

จากโจทย์กำหนดว่า  $x + 3$  หาร  $f(x)$  ลงตัว

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ว่า

$$f(-3) = 0$$

$$(-3)^3 + m(-3)^2n(-3) + p = 0$$

$$9m - 3n + p = 27 \quad \text{.....(1)}$$

จากโจทย์กำหนดว่า  $x - 1$  หาร  $f(x)$  เหลือเศษ 4

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ว่า

$$f(1) = 4$$

$$(1)^3 + m(1)^2 + n(1) + p = 0$$

$$m + n + p = 3 \quad \text{.....(2)}$$

จาก (1);  $p = 27 - 9m + 3n = 3(9 - 3m + n)$

แต่โจทย์กำหนดให้  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะบวก จึงสรุปได้ว่า  $p = 3$  เท่านั้น

แทนค่า  $p = 3$  ใน (1) และ (2) ดังนี้

จาก (1);  $9m - 3n + p = 27$

$$3m - n = 8 \quad \text{.....(3)}$$

จาก (2);  $m + n + p = 3$

$$m + n = 0 \quad \text{.....(4)}$$

(3) + (4);  $4m = 8$

$$\therefore m = 2$$

แทนค่า  $m = 2$  ใน (4);  $2 + n = 0$

$$\therefore n = -2$$

**ตัวอย่างที่ 5.8** กำหนดให้  $S = \left\{ x \mid \frac{x^3 + 5x^2 - 5x - 1}{x^2 + x - 2} = 0 \right\}$  จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $S$

**วิธีทำ** พิจารณาสมการ  $\frac{x^3 + 5x^2 - 5x - 1}{x^2 + x - 2} = 0$

จะได้  $x^3 + 5x^2 - 5x - 1 = 0$  และ  $x^2 + x - 2 \neq 0$

$$(x^3 - 1) + (5x^2 - 5x) = 0 \text{ และ } (x + 2)(x - 1) \neq 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) + 5x(x - 1) = 0 \text{ และ } x \neq -2 \text{ และ } x \neq -1$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1 + 5x) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 6x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ หรือ } x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x = 1 \text{ หรือ } x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

แต่จาก  $x \neq 1$  จึงได้ว่า  $x = -3 + 2\sqrt{2}, -3 - 2\sqrt{2}$

$$\text{ดังนั้น } S = \{-3 + 2\sqrt{2}, -3 - 2\sqrt{2}\}$$

ซึ่งมีผลบวกของสมาชิกในเซต  $S$  เท่ากับ  $(-3 + 2\sqrt{2}) + (-3 - 2\sqrt{2}) = -6$

## 5.4 การไม่เท่ากันของจำนวนจริงและอสมการ

### ทฤษฎีบท 5.4.1

กำหนดให้  $a, b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า  $a > b$  แล้ว  $a - b > 0$

2. ถ้า  $a < b$  แล้ว  $a - b < 0$

สมบัติของการไม่เท่ากันของจำนวนจริง

1. ถ้า  $a > b$  และ  $b > c$  แล้ว  $a > c$  (สมบัติถ่ายทอด)

2. ถ้า  $b > a$  แล้ว  $a + c > b + c$  (สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน)
3. ถ้า  $a > b$  และ  $a > 0$  แล้ว  $ac > bc$  ในทำนองเดียวกัน ถ้า  $a > b$  และ  $c < 0$  แล้ว  $ac < bc$  (สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน)

สมบัติที่กล่าวมาทั้งสามข้อ เป็นทฤษฎีบทของการไม่เท่ากันของจำนวนจริงก็ยังมีทฤษฎีบทอื่น ๆ อีกที่สำคัญที่จะกล่าวต่อไป

### ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับอสมการ

กำหนดให้  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า  $a > b$  และ  $c > d$  แล้ว  $a + c > b + d$
2. ถ้า  $a + c > b + c$  แล้ว  $a > b$
3. ถ้า  $ac > bc$  และ  $c > 0$  แล้ว  $a > b$  ในทำนองเดียวกัน ถ้า  $ac > bc$  และ  $c < 0$  แล้ว  $a < b$
4. ถ้า  $0 < a < b$  และ  $0 < c < d$  แล้ว  $ac < bd$  ในทำนองเดียวกัน ถ้า  $a < b < 0$  และ  $c < d < 0$  แล้ว  $ac > bd$
5. ถ้า  $0 < a < b$  แล้ว  $a^2 < b^2$
6. ถ้า  $a < b < 0$  แล้ว  $a^2 > b^2$
7. ถ้า  $0 < a < b$  แล้ว  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$  และ ถ้า  $a < b < 0$  แล้ว  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

**ตัวอย่างที่ 5.9** กำหนดให้  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด เพราะเหตุใด

1. ถ้า  $a > b$  และ  $c > d$  แล้ว  $a - c > b - d$
2. ถ้า  $a > b$  และ  $c > d$  แล้ว  $a - d > b - c$

**วิธีทำ**

1. ผิด เพราะว่าถ้ากำหนดให้  $a = 3, b = 2, c = 3$  และ  $d = 1$  จะได้ว่า  $a > b$  และ  $c > d$  พิจารณา  $0 = a - c > b - d = 1$  ขัดแย้ง
2. ถูก เพราะว่าถ้ากำหนดให้  $a > b$  และ  $c > d$  แล้ว  $a - b > 0$  และ  $c - d > 0$  ดังนั้น  $(a - b) + (c - d) > 0$  นั่นคือ  $(a - d) - (b - c) > 0$  โดยนิยามจะได้ว่า  $a - d > b - c$

เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง และ  $a < b$  เราสามารถอธิบายช่วงของจำนวนจริงแบบต่างๆ โดยใช้เซตและเส้นจำนวน ดังนี้

1. ช่วงเปิด (open interval) คือ  $(a, b) = \{x | a < x < b\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



2. ช่วงปิด (closed interval) คือ  $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



3. ช่วงครึ่งเปิด (left-open, right-closed) คือ  $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



4. ช่วงครึ่งเปิด (left-closed, right-open) คือ  $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



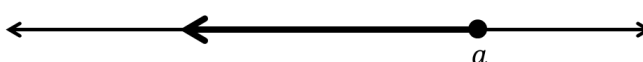
5. ช่วง  $[a, \infty)$  (left-closed) คือ  $[a, \infty) = \{x | a \leq x\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



6. ช่วง  $(a, \infty)$  (left-open) คือ  $(a, \infty) = \{x | a < x\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



7. ช่วง  $(-\infty, a]$  (right-closed) คือ  $(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



8. ช่วง  $(-\infty, a)$  (right-open) คือ  $(-\infty, a) = \{x|x < a\}$  สามารถแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



**ตัวอย่างที่ 5.10** กำหนดให้  $A = (3, 8)$  และ  $B = (6, 10)$  จงหา  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  และ  $A - B$   
**วิธีทำ**  $A \cup B = (3, 10)$ ,  $A \cap B = (6, 8)$  และ  $A - B = (3, 6)$

สมการ (Equation) คือประโยคที่มีตัวแปรและกล่าวถึงการเท่ากัน การแก้สมการ คือการหาค่าของตัวแปรที่ทำให้ประโยคนั้นเป็นจริง อาจกล่าวว่าเป็นการหา เซตคำตอบของสมการหรือการหารากของสมการก็ได้ ส่วนอสมการ (Inequality) คือประโยคที่มีตัวแปรและกล่าวถึงการไม่ เท่ากัน การแก้สมการ ก็คือการหาค่าของตัวแปรที่ทำให้ประโยคนั้น เป็นจริง ซึ่งอาจกล่าวว่าเป็นการหาเซตคำตอบของอสมการก็ได้เช่นกัน การแก้สมการนั้นมีข้อควรระวัง ดังนี้

1. การตัดออกสำหรับการบวกและลบ ทำได้เสมอ
2. การคูณหรือการหารทั้งสองข้างของสมการ ต้องระวังเรื่องของการเปลี่ยนเครื่องหมาย ถ้านำจำนวนลบ คูณหรือหารทั้งสองข้างของสมการ ต้องกลับด้านเครื่องหมาย
3. การกลับเศษเป็นส่วน การยกกำลังสองทั้งสองข้าง ถ้าไม่จำเป็นไม่ควรทำ

การแก้สมการกำลังหนึ่ง ทำเหมือนการแก้สมการกำลังหนึ่ง แต่ต้องระวังการย้ายข้างของจำนวนลบ จากคูณไปหารหรือจากหารไปคูณ เครื่องหมายของอสมการต้องกลับกัน

**ตัวอย่างที่ 5.11** จงแก้สมการ  $\frac{2x-3}{4} - \frac{x}{3} > \frac{5x+3}{12} - 1$

**วิธีทำ** นำ 12 คูณตลอดทั้งอสมการ จะได้ว่า  $3(2x-3) - 4x > 5x+3 - 12$

$$\text{นั่นคือ} \quad 6x - 18 - 4x > 5x - 9$$

$$\text{ดังนั้น} \quad 2x - 18 > 5x - 9$$

$$\text{ย้ายข้างของอสมการ} \quad -3x > 9$$

$$\text{นำ } -3 \text{ หารตลอดทั้งอสมการ เครื่องหมายกลับข้างจะได้คำตอบเป็น } x < -3$$

**ตัวอย่างที่ 5.12** จงแก้สมการสมการ  $7 < 5x - 2 < 17$

**วิธีทำ** นำ 2 บวกตลอดทั้งอสมการ  $7 + 2 < 5x - 2 + 2 < 17 + 2$

$$\text{ดังนั้น} \quad 9 < 5x < 19$$

นั่นคือ

$$\frac{9}{5} < x < \frac{19}{5}$$

การแก้สมการกำลังมากกว่าหนึ่ง ต้องอาศัยการแยกตัวประกอบและใช้หลักจำนวนบวกคูณกันเป็นจำนวนบวก จำนวนลบคูณกันเป็นจำนวนบวก แต่จำนวนบวกคูณจำนวนลบ หรือจำนวนลบคูณบวกจะได้จำนวนลบ

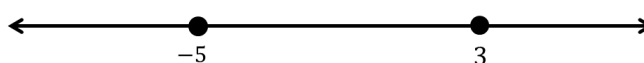
**ตัวอย่างที่ 5.13** จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^2 + 2x - 15 < 0$

วิธีทำ

1. แยกตัวประกอบแล้วสังเกตแต่ละวงเล็บให้มีสัมประสิทธิ์ของ  $x$  เป็นจำนวนบวก

$$(x + 5)(x - 3) < 0$$

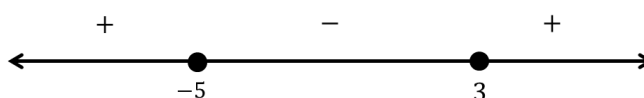
2. วาดเส้นจำนวนและใส่จุดซึ่งเป็นคำตอบหรือจุดซึ่งทำให้ได้ค่าศูนย์ลงไป



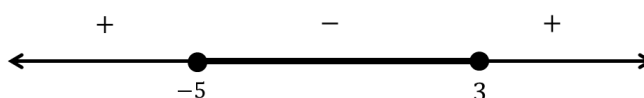
3. เริ่มใส่เครื่องหมายจากทางขวาสุดให้เป็นบวกก่อน แล้วพิจารณาแต่ละวงเล็บดังนี้

3.1 ถ้ามีกำลังคี่ เครื่องหมายทางซ้ายและทางขวาจะต้องต่างกัน

3.2 ถ้ามีกำลังคู่ เครื่องหมายทางซ้ายและทางขวาจะต้องเหมือนกัน



4. เลือกช่วงที่ต้องการ พร้อมตอบช่วงนั้น



ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ  $[-5, 3]$

**ตัวอย่างที่ 5.14** จงแก้สมการ  $\frac{(x-1)^5(x+2)^2}{x-2} \leq 0$

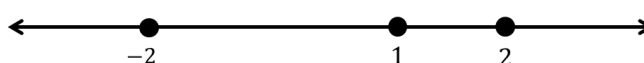
วิธีทำ

1. แยกตัวประกอบแล้วสังเกตแต่ละวงเล็บให้มีสัมประสิทธิ์ของ  $x$  เป็นจำนวนบวก ซึ่งตัวอย่างนี้ได้แยกตัวประกอบแล้ว หลังจากนั้นให้นำตัวส่วนยกกำลังสองคูณตลอดอสมการ

$$\frac{(x-2)^2(x-1)^5(x+2)^2}{x-2} \leq (x-2)^2 \cdot 0$$

นั่นคือ  $(x-2)(x-1)^5(x+2)^2 \leq 0$

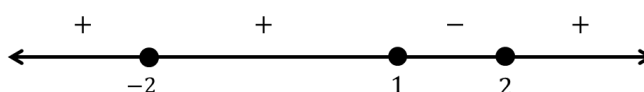
2. วาดเส้นจำนวนและใส่จุดซึ่งเป็นคำตอบหรือจุดซึ่งทำให้ได้ค่าศูนย์ลงไป



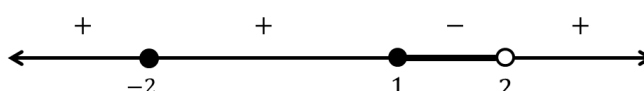
3. เริ่มใส่เครื่องหมายจากทางขวาสุดให้เป็นบวกก่อน แล้วพิจารณาแต่ละวงเล็บดังนี้

3.1 ถ้ามีกำลังคี่ เครื่องหมายทางซ้ายและทางขวาจะต้องต่างกัน

3.2 ถ้ามีกำลังคู่ เครื่องหมายทางซ้ายและทางขวาจะต้องเหมือนกัน



4. เลือกช่วงที่ต้องการ พร้อมตอบช่วงนั้น แต่ต้องระวังเครื่องหมายเท่ากับ หากตัวใดอยู่ล่่างคำตอบจะไม่ใช่ตัวนั้น



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ  $[1, 2)$

ตัวอย่างที่ 5.15 ให้  $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ มี } y \in \mathbb{N} \text{ ที่ทำให้ } \frac{1}{(x-20)(y-1)} < 0 \right\}$  ผลบวกของสมาชิกของเซต  $A$  เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ พิจารณาเซต  $A$  จากอสมการ  $\frac{1}{(x-20)(y-1)} < 0$

แยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1  $x - 20 > 0$  และ  $y - 1 < 0$

จะได้  $x > 20$  และ  $y < 1$

ซึ่งกรณีนี้ใช้ไม่ได้ เพราะ  $y < 1$  ซึ่ง  $y$  ไม่เป็นจำนวนนับ

$$\begin{array}{lll} \text{กรณีที่ 2} & x - 20 < 0 & \text{และ} & y > 1 \\ & x < 20 & \text{และ} & y > 1 \end{array}$$

แต่โจทย์กำหนดให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนนับ จึงได้ว่า  $x = 1, 2, 3, \dots, 19$  และ  $y = 2, 3, 4, \dots$  แต่สมาชิกในเซต  $A$  ต้องการเฉพาะค่าของ  $x$  เท่านั้น

ดังนั้น  $A = 1, 2, 3, \dots, 19$  และ

$$\text{ผลบวกของสมาชิกในเซต } A = 1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19}{2}(1 + 19) = 190$$

## 5.5 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)

### บทนิยาม 5.5.1

เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของ  $x$  เขียนเป็น  $|x|$  และ

$$|x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

### ทฤษฎีบท 5.5.2

กำหนดให้  $x, y$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

1.  $|x| = |-x|$
2.  $|xy| = |x| |y|$
3.  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
4.  $|x^2| = |x|^2 = x^2$
5.  $|x + y| = |x| + |y|$  ก็ต่อเมื่อ  $xy \geq 0$
6. เมื่อ  $a > 0$ 
  - 6.1  $|x| < a$  ก็ต่อเมื่อ  $-a < x < a$
  - 6.2  $|x| \leq a$  ก็ต่อเมื่อ  $-a \leq x \leq a$
  - 6.3  $|x| > a$  ก็ต่อเมื่อ  $x > a$  หรือ  $x < -a$
  - 6.4  $|x| \geq a$  ก็ต่อเมื่อ  $x \geq a$  หรือ  $x \leq -a$
7.  $|x| = |y|$  ก็ต่อเมื่อ  $x = y$  หรือ  $x = -y$
8.  $|x| = |y|$  ก็ต่อเมื่อ  $x^2 = y^2$
9.  $|x| \geq |y|$  ก็ต่อเมื่อ  $x^2 \geq y^2$

**ตัวอย่างที่ 5.16** จงหาเซตคำตอบของสมการ  $|5 - 2x| < 13$

วิธีทำ จากนิยามค่าสัมบูรณ์ จะได้ว่า

$$-13 < 5 - 2x < 13$$

นำ  $-5$  บวกตลอดทั้งอสมการ จะได้ว่า  $-18 < -2x < 8$

นำ  $-2$  หารตลอดทั้งอสมการ จะได้ว่า  $-4 < x < 9$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ  $(-4, 9)$

**ตัวอย่างที่ 5.17** ให้  $x \in \mathbb{R}$  โดยที่  $|x| < 3$  จงแสดงว่า  $|x^2 - 1| < 4|x + 1|$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= |(x - 1)(x + 1)| = |x - 1||x + 1| \\ &\leq (|x| + 1)|x + 1| \\ &< (3 + 1)|x + 1| \\ &= 4|x + 1| \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 5.18** ให้  $x, y \in \mathbb{R}$  จงแสดงว่า ถ้า  $|x + 1| < x + y$  แล้ว  $2x + 1 < 2xy + y^2$

วิธีทำ สมมติ

$$|x + 1| < x + y$$

จึงได้ว่า

$$x + y > 0$$

ดังนั้น

$$|x + y| = x + y$$

เพราะฉะนั้น

$$|x + 1| < |x + y|$$

จากทฤษฎีบท จะได้ว่า  $(x + 1)^2 < (x + y)^2$

นั่นคือ

$$x^2 + 2x + 1 < x^2 + 2xy + y^2$$

ดังนั้น

$$2x + 1 < 2xy + y^2$$

จากเนื้อหาที่ผ่านมาได้กล่าวถึงสมบัติของจำนวนจริง ความบริสุทธิ์หรือสัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยที่สุด ทฤษฎีบทเศษเหลือ ตัวประกอบ การไม่เท่ากันของจำนวนจริง ตลอดจนอสมการและค่าสัมบูรณ์ ซึ่งประกอบด้วยนิยามและทฤษฎีพื้นฐาน รวมถึงตัวอย่างที่ไม่ยากเพื่อให้เข้าใจต่อความเข้าใจ

ระบบจำนวนจริงเป็นพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูง เป็นพื้นฐานในการเรียนสาขาวิชาต่างๆ เนื่องจากจำนวนจริงเป็นจำนวนที่ใช้กันในชีวิตประจำวัน ทั้งจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ รวมไปถึงตัวดำเนินการต่างๆของจำนวนจริง ทั้งการบวก การคูณ แคลคูลัส ฟังก์ชันค่าจริง นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติต่างๆที่จะใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนในรายวิชาขั้นสูงต่อไปอีกด้วย

### แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิจารณาว่าแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด เพราะเหตุใด
  - 1.1 เซตของจำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดการบวก
  - 1.2 เซตของจำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดการคูณ
  - 1.3 เซตของจำนวนคู่มีสมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก
  - 1.4 เซตของจำนวนนับมีสมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก
  - 1.5 เซตของจำนวนตรรกยะมีสมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ
  - 1.6 เซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ 0 จะมีสมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ
2. กำหนดให้  $x * y = \frac{xy}{2}$  จงหา อินเวอร์สการดำเนินการ  $*$  ของ 5 และ 4
3. จงแยกตัวประกอบของ  $4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$
4. จงหาค่า  $k$  ถ้า  $x^3 + 2x^2 - 5x + k$  หารด้วย  $x + 2$  เหลือเศษ 4
5. กำหนดให้  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิดเพราะเหตุใด
  - 5.1 ถ้า  $a > b$  แล้ว  $a^2 > b^2$
  - 5.2 ถ้า  $ac > bc$  และ  $c \neq 0$  แล้ว  $a > b$
  - 5.3 ถ้า  $a \neq 0$  และ  $b \neq 0$  ถ้า  $a > b$  แล้ว  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
6. จงหาเซตคำตอบของอสมการ  $x^2 + 2x - 15 > 0$
7. จงหาเซตคำตอบของอสมการ  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 > 0$

## เอกสารอ้างอิง

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัตินิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ประเสริฐ ภู่งเงิน และคณะ. (2550). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. บุรีรัมย์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553).**คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว

## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

### เนื้อหาประจำบท

1. ระบบตัวเลขไม่มีหลัก
2. ระบบตัวเลขมีหลัก

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. จำแนกระบบเลขมีหลักและระบบเลขไม่มีหลักได้
2. สามารถแปลงเลขฐานต่างๆ เป็นเลขฐานสิบได้
3. สามารถแปลงเลขฐานสิบเป็นเลขฐานต่างๆ ได้
4. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้
5. ใช้ความรู้ ทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ประยุกต์กับเลขฐานต่างๆ ได้

### วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
  - 1.1 ระบบตัวเลขไม่มีหลัก
  - 1.2 ระบบตัวเลขมีหลัก
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
  - 2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์
  - 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

### สื่อการเรียนรู้การสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ
2. Slide Presentation

### การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก การโต้ตอบและการซักถาม
2. แบบทดสอบ
3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

## บทที่ 6

### ระบบเลขฐาน

ระบบตัวเลขที่มนุษย์ใช้กันตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันมีอยู่สองระบบ คือ ระบบตัวเลขที่ไม่มีหลัก และระบบตัวเลขที่มีหลัก ระบบที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันคือระบบตัวเลขที่มีหลัก ระบบนี้เป็นระบบที่เราคุ้นเคยกันและใช้กันอยู่ทั่วไป กล่าวคือ ตำแหน่งหลักของตัวเลขจะแสดงค่าของตัวเลขนั้นด้วยโดยอาศัยสัญกรณ์เชิงตำแหน่งของหลักต่างๆ ระบบเลขมีหลักที่เราคุ้นเคยกันก็คือจำนวนในฐานสิบ เช่น จำนวนนับ หรือตัวเลขหน้าจุดทศนิยมจะมีหลักต่างๆ ที่มีนัยสำคัญจากน้อยไปมาก โดยพิจารณาจากขวาไปซ้าย คือ หลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย หลักพัน หลักหมื่น เป็นต้น ระบบเลขไม่มีหลัก คือระบบเลขที่ไม่่ว่าจะเขียนตัวเลขแต่ละตัวไว้ที่ตำแหน่งใด ค่าของตัวเลขนั้นจะมีค่าคงที่เสมอ ระบบไม่มีหลักนี้มีข้อเสียที่สำคัญ ถึงแม้ว่าจะคำนวณทางพีชคณิตพื้นฐานได้ แต่ก็ไม่สะดวกเท่ากับระบบเลขแบบมีหลัก ระบบเลขโรมัน เป็นตัวอย่างของระบบเลขไม่มีหลัก ที่มนุษย์คุ้นเคยและใช้กันมาก จึงเป็นตัวอย่างระบบเลขไม่มีหลักที่น่าสนใจ ในตอนนี้ผู้เขียนจะอธิบายรายละเอียดต่างๆ เกี่ยวกับระบบนี้ดังต่อไปนี้

#### 6.1 จำนวนในระบบโรมัน

จากที่กล่าวมาแล้วว่าระบบเลขโรมันเป็นตัวอย่างหนึ่งของระบบตัวเลขที่ไม่มีหลักที่น่าสนใจ ก่อนที่จะศึกษาในเรื่องอื่นๆ ของระบบต้องรู้จักสัญลักษณ์พื้นฐานที่สำคัญ ซึ่งใช้แทนจำนวนต่างๆ ดังนี้

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| $I$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่ง     |
| $V$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้า       |
| $X$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ สิบ       |
| $L$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าสิบ    |
| $C$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งร้อย |
| $D$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าร้อย   |
| $M$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งพัน  |

จำนวนที่เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ที่มีค่าน้อยกว่าไว้ด้านหน้าค่าที่มีค่ามากกว่า ค่าของจำนวนที่ได้จะมีค่าเท่ากับจำนวนที่มีค่ามากลบด้วยจำนวนที่มีค่าน้อยกว่า แต่ถ้าเขียนไว้ด้านหลังจะมีค่าเท่ากับจำนวนที่มีค่ามากบวกด้วยจำนวนที่มีค่าน้อยกว่า เช่น

|              |                                                   |
|--------------|---------------------------------------------------|
| <i>IX</i>    | เป็นจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $10 - 1 = 9$             |
| <i>VL</i>    | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $50 - 5 = 45$             |
| <i>XC</i>    | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 - 10 = 90$           |
| <i>XII</i>   | เป็นจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $10 + 2 = 12$            |
| <i>LVI</i>   | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $50 + 5 + 1 = 56$         |
| <i>CXIV</i>  | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 + 10 + 4 = 114$      |
| <i>XIIV</i>  | เป็นจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $10 + 3 = 13$            |
| <i>LIX</i>   | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $50 + 8 = 58$             |
| <i>CLXIV</i> | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 + 50 + 10 + 4 = 114$ |
| <i>IXC</i>   | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 - 9 = 91$            |

จำนวนที่มีค่าเกินกว่าที่กำหนดไว้ตามสัญลักษณ์ดังกล่าวนี้ จะใช้การขีดเส้นไว้เหนือสัญลักษณ์ แทนจำนวนซึ่งมีค่าเท่ากับสัญลักษณ์นั้นคูณด้วยหนึ่งพัน ตัวอย่างเช่น

|                 |                                                                              |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{I}$       | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งพัน                     |
| $\bar{V}$       | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าพัน                         |
| $\bar{X}$       | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ สิบคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งหมื่น                     |
| $\bar{L}$       | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าสิบคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าหมื่น                    |
| $\bar{C}$       | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งร้อยคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งแสน                 |
| $\bar{D}$       | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าร้อยคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าแสน                     |
| $\bar{M}$       | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งล้าน                 |
| $\bar{\bar{I}}$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งล้าน         |
| $\bar{\bar{V}}$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าล้าน             |
| $\bar{\bar{X}}$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ สิบคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับสิบล้าน             |
| $\bar{\bar{L}}$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าสิบคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าสิบล้าน       |
| $\bar{\bar{C}}$ | แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งร้อยคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งร้อยล้าน |

ตารางที่ 6.1 แสดงสัญลักษณ์ของเลขโรมันแบบต่างๆ

| เลขโรมัน    | เลขอารบิก | ค่าของตัวเลข | เลขโรมัน    | เลขอารบิก | ค่าของตัวเลข |
|-------------|-----------|--------------|-------------|-----------|--------------|
| <i>I</i>    | 1         | หนึ่ง        | <i>XX</i>   | 20        | ยี่สิบ       |
| <i>II</i>   | 2         | สอง          | <i>XXX</i>  | 30        | สามสิบ       |
| <i>III</i>  | 3         | สาม          | <i>XL</i>   | 40        | สี่สิบ       |
| <i>IV</i>   | 4         | สี่          | <i>L</i>    | 50        | ห้าสิบ       |
| <i>V</i>    | 5         | ห้า          | <i>LX</i>   | 60        | หกสิบ        |
| <i>VI</i>   | 6         | หก           | <i>LXX</i>  | 70        | เจ็ดสิบ      |
| <i>VII</i>  | 7         | เจ็ด         | <i>LXXX</i> | 80        | แปดสิบ       |
| <i>VIII</i> | 8         | แปด          | <i>XC</i>   | 90        | เก้าสิบ      |
| <i>IX</i>   | 9         | เก้า         | <i>C</i>    | 100       | หนึ่งร้อย    |
| <i>X</i>    | 10        | สิบ          | <i>CC</i>   | 200       | สองร้อย      |

ในระบบเลขโรมันเราสามารถดำเนินการต่างๆ ผ่านการแปลงไปเป็นเลขอารบิก เมื่อได้คำตอบก็แปลงกลับมาเป็นเลขโรมัน

**ตัวอย่างที่ 6.1** จงเขียนจำนวนเลขต่อไปนี้ให้เป็นเลขโรมัน 1, 325 และ 3, 567

วิธีทำ

$$1,325 = 1,000 + 300 + 20 + 5 = MCCCXXV$$

$$3,567 = 3,000 + 500 + 60 + 7 = MMMDLXVII$$

**ตัวอย่างที่ 6.2** จงเขียนหาผลบวกของ *MXCVII* และ *MM*

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{MXCVII} & & 1097 \\
 & + & \\
 \text{MM} & & 2000 \\
 \text{ตอบ } \text{MMM} & \text{MXCVII} & 3097
 \end{array}$$

## 6.2 ระบบตัวเลขมีหลัก

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่าจำนวนในฐานสิบเป็นตัวอย่างหนึ่งของระบบตัวเลขมีหลักและยังเป็นที่ยอมรับใช้กันอยู่ทั้งนี้เพราะว่าการคำนวณทางพีชคณิตเบื้องต้นง่ายกว่าระบบตัวเลขไม่มีหลักมาก ระบบตัวเลขมีหลักนี้ไม่ใช่ว่าเพียงแค่จำนวนในฐานสิบเท่านั้นแต่ยังมีจำนวนในฐานอื่นๆด้วย ซึ่งระบบเลขฐานอื่นที่นิยมใช้ในระบบดิจิทัลมีอยู่ 4 ระบบ ดังตาราง

ตารางที่ 6.2 แสดงระบบเลขฐานที่นิยมใช้ในระบบดิจิทัล

| ระบบจำนวน | จำนวนหลัก(digit)                               |
|-----------|------------------------------------------------|
| ฐาน 2     | 0, 1                                           |
| ฐาน 8     | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7                         |
| ฐาน 10    | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9                   |
| ฐาน 16    | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F |

1. ระบบเลขฐานสิบ (Decimal Number System) จะมีเลขฐานเป็น 10 นั่นคือ จะ ใช้สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 10 ในการแสดงค่าของตัวเลข เป็นระบบเลขฐานที่คุ้นเคยมาก ใช้ในชีวิตประจำวันอยู่ตลอดเวลา ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานสิบ

$$3409 = 3 \cdot (10)^3 + 4 \cdot (10)^2 + 0 \cdot (10) + 9$$

$$256.05 = 2 \cdot (10)^2 + 5 \cdot (10) + 6 + 0 \cdot (10)^{-1} + 5 \cdot (10)^{-2}$$

$$149.11 = 1 \cdot (10)^2 + 4 \cdot (10) + 9 + 1 \cdot (10)^{-1} + 1 \cdot (10)^{-2}$$

$$10409.23 = 1 \cdot (10)^4 + 0 \cdot (10)^3 + 4 \cdot (10)^2 + 0 \cdot (10) + 9 + 2 \cdot (10)^{-1} + 3 \cdot (10)^{-2}$$

$$1.1234 = 1 + 1 \cdot (10)^{-1} + 2 \cdot (10)^{-2} + 3 \cdot (10)^{-3} + 4 \cdot (10)^{-4}$$

$$34.1 = 3 \cdot (10) + 4 + 1 \cdot (10)^{-1}$$

2. ระบบเลขฐานสอง (Binary Number System) จะมีเลขฐานเป็น 2 นั่นคือ จะใช้ สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 2 ในการแสดงค่าของตัวเลข ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานสอง

$$1101_2 = 1 \cdot (2)^3 + 1 \cdot (2)^2 + 0 \cdot (2) + 1$$

$$= 13$$

$$101.01_2 = 1 \cdot (2)^2 + 0 \cdot (2) + 1 + 0 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2}$$

$$= 5.25$$

$$1110.11_2 = 1 \cdot (2)^3 + 1 \cdot (2)^2 + 1 \cdot (2) + 1 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2}$$

$$= 14.75$$

$$1.1111 = 1 + 1 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2} + 1 \cdot (2)^{-3} + 1 \cdot (2)^{-4}$$

$$= 1.9375$$

3. ระบบเลขฐานแปด (Octal Number System) จะมีเลขฐานเป็น 8 นั่นคือ จะใช้ สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 8 ในการแสดงค่าของตัวเลข เป็นเลขฐานที่ถูกใช้ในระบบดิจิทัลเพื่อ

ทดแทนข้อเสียของเลขฐานสอง ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานแปด

$$\begin{aligned} 470_8 &= 4 \cdot (8)^2 + 7 \cdot (8) + 0 \\ &= 256 + 56 + 0 \\ &= 312 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 54.34_8 &= 5 \cdot (8) + 4 + 3 \cdot (8)^{-1} + 4 \cdot (8)^{-2} \\ &= 40 + 4 + 0.375 + 0.0625 \\ &= 44.4375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 114.012_8 &= 1 \cdot (8)^2 + 1 \cdot (8) + 4 + 0 \cdot (8)^{-1} + 1 \cdot (8)^{-2} + 2 \cdot (8)^{-3} \\ &= 64 + 8 + 4 + 0 + 0.015625 + 0.00390625 \\ &= 76.01953125 \end{aligned}$$

4. ระบบเลขฐานสิบหก (Hexadecimal Number System) จะมีเลขฐานเป็น 16 นั่นคือ จะใช้สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 16 ในการแสดงค่าของตัวเลข เป็นระบบเลขฐานที่แปลความหมายได้ยากกว่าเลขฐานแปด ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานสิบหก

$$\begin{aligned} 3B_{16} &= 3 \cdot (16)^1 + 11 \cdot (16)^0 \\ &= 48 + 11 \\ &= 59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9.4C_{16} &= 9 \cdot (16)^0 + 4 \cdot (16)^{-1} + 12 \cdot (16)^{-2} \\ &= 9 + 0.25 + 0.046875 \\ &= 9.296875 \end{aligned}$$

## 6.3 การแปลงเลขฐานต่างๆ

### 6.3.1 การแปลงเลขฐานสิบเป็นฐานอื่นๆ

การแปลงเลขฐานสิบเป็นอื่น ขั้นที่ 1 พิจารณาตัวเลขหน้าจุดทศนิยม ให้นำเลขฐานที่ต้องการ ไปหารเลขฐานสิบที่ต้องการจะแปลง จนกว่าผลหารที่ได้เท่ากับศูนย์ ซึ่งเศษที่ได้จากการหารแต่ละครั้งคือเลขฐานที่เราต้องการ ให้เขียนเศษของการหารที่ได้เรียงจากเศษที่ได้จากการหารครั้งสุดท้ายเรียงขึ้นไปจนถึงเศษที่ได้จากการหารครั้งแรกตามลำดับ ขั้นที่ 2 พิจารณาตัวเลขหลังจุดทศนิยม ให้นำเลขฐานที่ต้องการ คูณตัวเลขหลังจุดทศนิยม นำค่าหน้าจุดทศนิยมที่ได้ไปเขียนเลขหลังจุดทศนิยม

ในฐานนั้นตามลำดับ

**ตัวอย่างที่ 6.3** จงแปลงจำนวน 324.024 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 5

**วิธีทำ** ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 324 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 5 โดยการหาร 324 ด้วย 5 แล้วดูผลลัพธ์ และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆ จนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |     |       |
|---|-----|-------|
| 5 | 324 |       |
| 5 | 64  | เศษ 4 |
| 5 | 12  | เศษ 4 |
|   | 2   | เศษ 2 |

ดังนั้น  $324 = 2244_5$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 5 โดยนำ 5 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|       |                                      |
|-------|--------------------------------------|
| 0.24  | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 0.120 | $5 \times 0.024$                     |
| 0.60  | $5 \times 0.12$                      |
| 3.0   | $5 \times 0.6$                       |

ดังนั้น  $0.024 = 0.003_5$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $324.024 = 2244.003_5$

**ตัวอย่างที่ 6.4** จงแปลงจำนวน 248.123 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3

**วิธีทำ** ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 248 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 248 ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์ และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |     |       |
|---|-----|-------|
| 3 | 248 |       |
| 3 | 82  | เศษ 2 |
| 3 | 27  | เศษ 1 |
| 3 | 9   | เศษ 0 |
| 3 | 3   | เศษ 0 |
|   | 1   | เศษ 0 |

ดังนั้น  $248 = 100012_3$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|       |                                      |
|-------|--------------------------------------|
| 0.123 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 0.369 | $3 \times 0.123$                     |
| 1.107 | $3 \times 0.369$                     |
| 0.321 | $3 \times 0.107$                     |
| 0.963 | $3 \times 0.321$                     |
| 2.889 | $3 \times 0.963$                     |
| 2.667 | $3 \times 0.889$                     |

ดังนั้น  $0.123 = 0.01002_3$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $248.123 = 100012.01002_3$

**ตัวอย่างที่ 6.5** จงแปลงจำนวน 48.67 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 2

**วิธีทำ** ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 48 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 2 โดยการหาร 48 ด้วย 2 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |    |       |
|---|----|-------|
| 2 | 48 |       |
| 2 | 24 | เศษ 0 |
| 2 | 12 | เศษ 0 |
| 2 | 6  | เศษ 0 |
| 2 | 3  | เศษ 0 |
|   | 1  | เศษ 0 |

ดังนั้น  $48 = 100000_2$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 2 โดยนำ 2 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.67 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 1.34 | $2 \times 0.67$                      |
| 0.68 | $2 \times 0.34$                      |
| 1.36 | $2 \times 0.68$                      |
| 0.72 | $2 \times 0.36$                      |
| 1.44 | $2 \times 0.72$                      |
| 0.88 | $2 \times 0.44$                      |

ดังนั้น  $0.67 = 0.101010_2$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $48.67 = 100000.101010_2$

**ตัวอย่างที่ 6.6** จงแปลงจำนวน 142.13 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 4

**วิธีทำ** ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 142 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 4 โดยการหาร 142 ด้วย 4 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |     |       |
|---|-----|-------|
| 4 | 142 |       |
| 4 | 35  | เศษ 2 |
| 4 | 8   | เศษ 3 |
|   | 2   | เศษ 0 |

ดังนั้น  $142 = 2032_4$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 4 โดยนำ 4 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.13 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 0.52 | $4 \times 0.13$                      |
| 2.04 | $4 \times 0.52$                      |
| 0.16 | $4 \times 0.04$                      |
| 0.64 | $4 \times 0.16$                      |
| 2.56 | $4 \times 0.64$                      |
| 2.24 | $4 \times 0.56$                      |

ดังนั้น  $0.13 = 0.020022_4$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $142.13 = 2032.020022_4$

**ตัวอย่างที่ 6.7** จงแปลงจำนวน 1048.21 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 7

**วิธีทำ** ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 1048 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 7 โดยการหาร 1048 ด้วย 7 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |      |       |
|---|------|-------|
| 7 | 1048 |       |
| 7 | 149  | เศษ 5 |
| 7 | 21   | เศษ 2 |
|   | 3    | เศษ 0 |

ดังนั้น  $1048 = 3025_7$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 7 โดยนำ 7 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.21 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 1.47 | $7 \times 0.21$                      |
| 3.29 | $7 \times 0.47$                      |
| 2.03 | $7 \times 0.29$                      |
| 0.21 | $7 \times 0.03$                      |
| 1.47 | $7 \times 0.21$                      |
| 3.29 | $7 \times 0.47$                      |

ดังนั้น  $0.21 = 0.132_7$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $1048.21 = 3025.132_7$

### 6.3.2 การแปลงเลขฐานอื่นๆเป็นฐานสิบ

โดยทั่วไปแล้วถ้า  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 แล้วจำนวนในฐาน  $b$  จะอยู่ในรูป  $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b$  โดยที่  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$  และเราสามารถเขียนเลขฐานต่างๆเป็นฐานสิบได้ ดังนี้

$$(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b = a_n(b)^n + a_{n-1}(b)^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

**ตัวอย่างที่ 6.8** จงแปลงจำนวน  $2244.003_5$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2244.003_5 &= 2 \cdot (5)^3 + 2 \cdot (5)^2 + 4 \cdot 5 + 4 + 0 \cdot (5)^{-1} + 0 \cdot (5)^{-2} + 3 \cdot (5)^{-3} \\ &= 250 + 50 + 20 + 4 + 0.024 \\ &= 324.024 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 6.9** จงแปลงจำนวน  $2134.2_4$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2134.2_4 &= 2 \cdot (4)^3 + 1 \cdot (4)^2 + 3 \cdot 4 + 4 + 2 \cdot (4)^{-1} \\ &= 128 + 16 + 12 + 4 + 0.5 \\ &= 160.5 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 6.10** จงแปลงจำนวน  $114.11_8$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 114.11_8 &= 1 \cdot (8)^2 + 1 \cdot 8 + 4 + 1 \cdot (8)^{-1} + 1 \cdot (8)^{-2} \\ &= 64 + 8 + 4 + 0.125 + 0.015625 \\ &= 76.140625 \end{aligned}$$

นอกจากนี้ หากเราต้องการแปลงเลขฐานใดๆที่ไม่ใช่ฐานสิบ ไปเป็นเลขฐานอื่นๆที่ไม่ใช่ฐานสิบ เราสามารถแปลงผ่านเลขฐานสิบเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ เช่น

$$\begin{array}{ccccc} \text{Binary} & \implies & \text{Decimal} & \implies & \text{Octal} \\ 10111_2 & & 23 & & 27_8 \end{array}$$

**ตัวอย่างที่ 6.11** จงแปลงจำนวน  $2134.2_4$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสาม

วิธีทำ แปลงจำนวน  $2134.2_4$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 2134.2_4 &= 2 \cdot (4)^3 + 1 \cdot (4)^2 + 3 \cdot 4 + 4 + 2 \cdot (4)^{-1} \\ &= 128 + 16 + 12 + 4 + 0.5 \\ &= 160.5 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานสามดังนี้

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 160 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 160 ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |     |       |
|---|-----|-------|
| 3 | 160 |       |
| 3 | 53  | เศษ 1 |
| 3 | 17  | เศษ 2 |
| 3 | 5   | เศษ 2 |
|   | 1   | เศษ 2 |

ดังนั้น  $160 = 12221_3$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|     |                                      |
|-----|--------------------------------------|
| 0.5 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 1.5 | $3 \times 0.5$                       |
| 1.5 | $3 \times 0.5$                       |
| 1.5 | $3 \times 0.5$                       |

ดังนั้น  $0.5 = 0.111_3$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $160.5 = 12221.111_3$  นั่นคือ  $2134.2_4 = 12221.111_3$

**ตัวอย่างที่ 6.12** จงแปลงจำนวน  $223.21_8$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสี่

**วิธีทำ** แปลงจำนวน  $223.21_8$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 223.21_8 &= 2 \cdot (8)^2 + 2 \cdot 8 + 3 + 2 \cdot (8)^{-1} + 1 \cdot (8)^{-2} \\ &= 128 + 16 + 3 + 0.25 + 0.015625 \\ &= 147.27 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานสามดังนี้

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 147 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 147 ด้วย 4 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |     |       |
|---|-----|-------|
| 4 | 147 |       |
| 4 | 36  | เศษ 3 |
| 4 | 9   | เศษ 0 |
|   | 2   | เศษ 1 |

ดังนั้น  $147 = 2103_4$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 4 โดยนำ 4 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.27 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 1.08 | $4 \times 0.27$                      |
| 0.32 | $4 \times 0.08$                      |
| 1.44 | $4 \times 0.32$                      |
| 1.76 | $4 \times 0.44$                      |
| 3.04 | $4 \times 0.76$                      |

ดังนั้น  $0.27 = 0.10113_4$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $147.27 = 2103.10113_4$  นั่นคือ  $223.21_8 = 12221.111_4$

**ตัวอย่างที่ 6.13** จงแปลงจำนวน  $11101.01_2$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสาม

วิธีทำ แปลงจำนวน  $11101.01_2$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 11101.01_2 &= 1 \cdot (2)^4 + 1 \cdot (2)^3 + 1 \cdot (2)^2 + 0 \cdot 2 + 1 + 0 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2} \\ &= 16 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 \\ &= 29.25 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานสามดังนี้

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 29 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 29 ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |    |       |
|---|----|-------|
| 3 | 29 |       |
| 3 | 9  | เศษ 2 |
| 3 | 3  | เศษ 0 |
|   | 1  | เศษ 0 |

ดังนั้น  $29 = 1002_3$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.25 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 0.75 | $3 \times 0.25$                      |
| 2.25 | $3 \times 0.75$                      |
| 0.75 | $3 \times 0.25$                      |
| 2.25 | $3 \times 0.75$                      |
| 0.75 | $3 \times 0.25$                      |

ดังนั้น  $0.25 = 0.0202_3$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $29.25 = 1002.0202_3$  นั่นคือ  $11101.01_2 = 1002.0202_3$

**ตัวอย่างที่ 6.14** จงแปลงจำนวน  $3344.14_5$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานหก

วิธีทำ แปลงจำนวน  $3344.14_5$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 3344.14_5 &= 3 \cdot (5)^3 + 3 \cdot (5)^2 + 4 \cdot 5 + 4 + 1 \cdot (5)^{-1} + 4 \cdot (5)^{-2} \\ &= 375 + 75 + 20 + 4 + 0.2 + 0.16 \\ &= 474.36 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานหกดังนี้

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 474 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 6 โดยการหาร 474 ด้วย 6 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |     |       |
|---|-----|-------|
| 6 | 474 |       |
| 6 | 79  | เศษ 0 |
| 6 | 13  | เศษ 1 |
|   | 2   | เศษ 1 |

ดังนั้น  $474 = 2110_6$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 6 โดยนำ 6 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.36 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 2.16 | $6 \times 0.36$                      |
| 0.96 | $6 \times 0.16$                      |
| 5.76 | $6 \times 0.96$                      |
| 4.56 | $6 \times 0.76$                      |
| 3.36 | $6 \times 0.56$                      |

ดังนั้น  $0.36 = 0.20543_6$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $474.36 = 2110.20543_6$  นั่นคือ  $3344.14_5 = 2110.20543_6$

## 6.4 การดำเนินการของตัวเลขฐานต่างๆ

การบวกเลขฐาน มีหลักการเหมือนกันหมดทุกเลขฐาน คือ

1. ต้องเป็นเลขฐานเดียวกันทั้งตัวตั้งและตัวบวก
2. ต้องเติม 0 ให้ครบหลักและตั้งหลักเลขให้ตรงกันทั้งตัวตั้งและตัวบวก
3. ต้องบวกเลขหลักต่ำสุดทางขวามือก่อนเสมอ
4. ถ้าผลบวกน้อยกว่าฐานนับได้เท่าไรใส่ไว้ในหลักเดียวกันเท่านั้น
5. ถ้าผลบวกมากกว่าฐานต้องนับให้ได้เท่ากับฐานก่อนเหลือเศษเท่าไรใส่ไว้ในหลักเดียวกัน
6. ทำการบวกกันจนกว่าจะหมดทุกหลักผลลัพธ์ที่ได้คือคำตอบด้านล่างทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 6.15 จงบวกเลขฐาน 8 ต่อไปนี้  $473.65 + 236.25$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ตัวทศ} & \rightarrow & 111\ 1 \\
 \text{ตัวตั้ง} & \rightarrow & 473.65 \\
 & & + \\
 \text{ตัวบวก} & \rightarrow & 236.25 \\
 \text{คำตอบ} & \rightarrow & 732.12
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 6.16 จงบวกเลขฐาน 5 ต่อไปนี้  $124.14 + 312.44$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ตัวทศ} & \rightarrow & 11\ 1 \\
 \text{ตัวตั้ง} & \rightarrow & 124.14 \\
 & & + \\
 \text{ตัวบวก} & \rightarrow & 312.44 \\
 \text{คำตอบ} & \rightarrow & 442.13
 \end{array}$$

การลบเลขฐาน มีหลักการเหมือนกันหมดทุกเลขฐาน คือ

1. ต้องเป็นเลขฐานเดียวกันทั้งตัวตั้งและตัวบวก
2. ตัวตั้งต้องมีค่ามากกว่าตัวลบเสมอ
3. ต้องเติม 0 ให้ครบหลักและตั้งหลักเลขให้ตรงกันทั้งตัวตั้งและตัวลบ
4. ต้องลบเลขหลักต่ำสุดขวามือก่อนเสมอ
5. ถ้าค่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบให้นับค่าตัวลบเพิ่มขึ้นเท่ากับตัวตั้ง ค่าที่เพิ่มนี้คือผลต่าง หรือผลลบ
6. ถ้าค่าตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบให้ยืมหลักที่สูงกว่ามา 1 ค่า ซึ่งมีค่าในหลักต่ำเท่ากับฐาน เสมอ นำค่าที่ยืมมา ตั้งลบด้วยตัวลบผลต่างเท่าไร นำไปรวมกับตัวตั้งในหลักเดียวกันผลลัพธ์ คือคำตอบ
7. ทำการลบกันจนกว่าจะหมดทุกหลักผลลัพธ์ที่ได้คือคำตอบด้านล่างทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 6.17 จงบวกเลขฐาน 8 ต่อไปนี้  $473.65 - 236.25$

วิธีทำ

ตัวขอยืม  $\rightarrow$  068ตัวตั้ง  $\rightarrow$  473.65

—

ตัวลบ  $\rightarrow$  236.25คำตอบ  $\rightarrow$  235.40

ในส่วนของการคูณ และการหารเลขฐานต่างๆ ใช้วิธีการแปลงเป็นเลขฐานสิบแล้วดำเนินการ

$$\begin{array}{ccccc} \text{Binary} & \implies & \text{Decimal} & \implies & \text{Binary} \\ 111_2 \times 10_2 & & 7 \times 2 = 14 & & 1110_2 \end{array}$$

**ตัวอย่างที่ 6.18** จงหาค่าของ  $234_5 \times 331_5$

**วิธีทำ** แปลงจำนวน  $234_5$  และ  $331_5$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$234_5 = 2 \cdot (5)^2 + 3 \cdot 5 + 4$$

$$= 50 + 15 + 4$$

$$= 69$$

$$331_5 = 3 \cdot (5)^2 + 3 \cdot 5 + 1$$

$$= 75 + 15 + 1$$

$$= 91$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้  $69 \times 91 = 6,279$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 5

|   |       |       |
|---|-------|-------|
| 5 | 6,279 |       |
| 5 | 1,255 | เศษ 4 |
| 5 | 251   | เศษ 0 |
| 5 | 50    | เศษ 1 |
| 5 | 10    | เศษ 0 |
|   | 2     | เศษ 0 |

ดังนั้น  $6,279 = 200104_5$  นั่นคือ  $234_5 \times 331_5 = 200104_5$

**ตัวอย่างที่ 6.19** จงหาค่าของ  $114.16_7 \times 161.41_7$

**วิธีทำ** แปลงจำนวน  $114.16_7$  และ  $161.41_7$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 114.16_7 &= 1 \cdot (7)^2 + 1 \cdot 7 + 4 + 1 \cdot (7)^{-1} + 6 \cdot (7)^{-2} \\ &= 49 + 7 + 4 + 0.14 + 0.12 \\ &= 60.26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 161.41_7 &= 1 \cdot (7)^2 + 6 \cdot 7 + 1 + 4 \cdot (7)^{-1} + 1 \cdot (7)^{-2} \\ &= 49 + 42 + 1 + 0.57 + 0.02 \\ &= 92.59 \end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้  $60.26 \times 92.59 = 5,579.47$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 7

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 5,579 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 7 โดยการหาร 5,579 ด้วย 7 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |       |       |
|---|-------|-------|
| 7 | 5,579 |       |
| 7 | 797   | เศษ 0 |
| 7 | 113   | เศษ 6 |
| 7 | 16    | เศษ 1 |
|   | 2     | เศษ 2 |

ดังนั้น  $5,579 = 22160_7$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 7 โดยนำ 7 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.47 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 3.29 | $7 \times 0.47$                      |
| 2.03 | $7 \times 0.29$                      |
| 0.21 | $7 \times 0.03$                      |
| 1.47 | $7 \times 0.21$                      |
| 3.29 | $7 \times 0.47$                      |

ดังนั้น  $0.47 = 0.3201_7$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $5,579.47 = 22160.3201_7$  นั่นคือ  $114.16_7 \times 161.41_7 = 22160.3201_7$

**ตัวอย่างที่ 6.20** จงหาค่าของ  $2233.11_4 \times 121.01_4$  ตอบเป็นเลขฐานสาม

**วิธีทำ** แปลงจำนวน  $2233.11_4$  และ  $121.01_4$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 2233.11_4 &= 2 \cdot (4)^3 + 2 \cdot (4)^2 + 3 \cdot 4 + 3 + 1 \cdot (4)^{-1} + 1 \cdot (4)^{-2} \\ &= 128 + 32 + 12 + 3 + 0.25 + 0.06 \\ &= 175.31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 121.01_4 &= 1 \cdot (4)^2 + 2 \cdot 4 + 1 + 0 \cdot (4)^{-1} + 1 \cdot (4)^{-2} \\ &= 16 + 8 + 1 + 0 + 0.06 \\ &= 25.06 \end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้  $175.31 \times 25.06 = 4,393.27$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 3

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 4,393 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 4,393 ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |       |       |
|---|-------|-------|
| 3 | 4,393 |       |
| 3 | 1,464 | เศษ 1 |
| 3 | 488   | เศษ 0 |
| 3 | 162   | เศษ 2 |
| 3 | 54    | เศษ 0 |
| 3 | 18    | เศษ 0 |
| 3 | 6     | เศษ 0 |
|   | 2     | เศษ 0 |

ดังนั้น  $4,393 = 20000201_3$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.27 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 0.81 | $3 \times 0.27$                      |
| 2.43 | $3 \times 0.81$                      |
| 1.29 | $3 \times 0.43$                      |
| 0.87 | $3 \times 0.29$                      |
| 2.61 | $3 \times 0.87$                      |

ดังนั้น  $0.27 = 0.02102_3$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $4,393.27 = 20000201.02102_3$  นั่นคือ  $2233.11_4 \times 121.01_4 = 20000201.02102_3$

**ตัวอย่างที่ 6.21** จงหาค่าของ  $12514_6 \div 32_6$  ตอบเป็นเลขฐานสาม

*วิธีทำ* แปลงจำนวน  $12514_6$  และ  $32_6$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 12514_6 &= 1 \cdot (6)^4 + 2 \cdot (6)^3 + 5 \cdot (6)^2 + 1 \cdot 6 + 4 \\ &= 1296 + 432 + 180 + 6 + 4 \\ &= 1918 \\ 32_6 &= 3 \cdot 6 + 2 \\ &= 18 + 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้  $1,918 \div 20 = 95.9$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 6

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 95 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 95 ด้วย 9 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |    |       |
|---|----|-------|
| 6 | 95 |       |
| 6 | 17 | เศษ 3 |
|   | 2  | เศษ 5 |

ดังนั้น  $95 = 253_6$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 6 โดยนำ 6 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|     |                                      |
|-----|--------------------------------------|
| 0.9 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 5.4 | $6 \times 0.9$                       |
| 2.4 | $6 \times 0.4$                       |
| 2.4 | $6 \times 0.4$                       |

ดังนั้น  $0.9 = 0.522_6$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $95.9 = 253.522_6$  นั่นคือ  $12514_6 \div 32_6 = 253.522_6$

ตัวอย่างที่ 6.22 จงหาค่าของ  $332313.1_4 \div 3.21_4$  ตอบเป็นเลขฐานสาม

วิธีทำ แปลงจำนวน  $332313.1_4$  และ  $3.21_4$  ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 332313.1_4 &= 3 \cdot (4)^5 + 3 \cdot (4)^4 + 2 \cdot (4)^3 + 3 \cdot (4)^2 + 1 \cdot 4 + 3 + 1 \cdot (4)^{-1} \\ &= 3,072 + 768 + 128 + 48 + 4 + 3 + 0.25 \\ &= 4,023.25 \\ 3.21_4 &= 3 + 2 \cdot (4)^{-1} + 1 \cdot (4)^{-2} \\ &= 3 + 0.5 + 0.06 \\ &= 3.56 \end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาหารกัน ดังนี้  $4,023.25 \div 3.56 = 1130.13$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 4

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 1130 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 1130 ด้วย 4 แล้วดูผลลัพธ์ และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

|   |      |       |
|---|------|-------|
| 4 | 1130 |       |
| 4 | 282  | เศษ 2 |
| 4 | 70   | เศษ 2 |
| 4 | 17   | เศษ 2 |
| 4 | 4    | เศษ 1 |
|   | 1    | เศษ 0 |

ดังนั้น  $1130 = 101222_4$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 4 โดยนำ 4 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| 0.13 | (เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม) |
| 0.52 | $4 \times 0.13$                      |
| 2.08 | $4 \times 0.52$                      |
| 0.32 | $4 \times 0.08$                      |
| 1.28 | $4 \times 0.32$                      |
| 1.12 | $4 \times 0.28$                      |

ดังนั้น  $0.13 = 0.02011_4$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า  $1130.13 = 101222.02011_4$  นั่นคือ  $332313.1_4 \div 3.21_4 =$

101222.020114

เนื้อหาทั้งหมดที่กล่าวไปแล้วนั้นประกอบด้วยเนื้อหาที่สำคัญคือ จำนวนในระบบโรมัน ระบบตัวเลข มีหลัก ซึ่งสองระบบนี้จะทำให้เห็นวิวัฒนาการของการใช้ระบบตัวเลข นอกจากนี้ยังกล่าวถึงการแปลงเลขฐานต่างๆ รวมถึงการดำเนินการของเลขฐานต่างๆ อีกด้วย

จากที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นว่า เราสามารถแปลงเลขฐานต่างๆ ไปมาได้ โดยมีวัตถุประสงค์ คือ ใช้ตัวเลขให้เหมาะสมกับการใช้งาน เช่นปัจจุบันนี้เราใช้ตัวเลขฐานสิบในชีวิตประจำวัน แต่ในทางคอมพิวเตอร์ไม่สามารถอ่านตัวเลขฐานสิบได้เนื่องจากเป็นสัญญาณไฟฟ้า จึงมีเฉพาะเปิดและปิดเท่านั้น ดังนั้นต้องใช้ระบบเลขฐานสองแทนเลขฐานสิบ เพื่อให้เหมาะสมตามการใช้งานจึงต้องมีการแปลงเลขฐานด้วยวิธีการต่างๆที่กล่าวในบทเรียนที่ผ่านมา

## แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงแปลงเลขฐานที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นเลขฐานสิบ

1.1  $111011_2$

1.2  $23412_5$

1.3  $6A3.BC_{16}$

1.4  $1175.63_8$

1.5  $125.867_9$

1.6  $512.31_7$

1.7  $3AB.BA_{13}$

2. จงแปลง 121 ฐานสิบไปเป็นเลขฐานต่างๆดังนี้

2.1 ฐาน 2

2.2 ฐาน 4

2.3 ฐาน 5

2.4 ฐาน 8

2.5 ฐาน 9

2.6 ฐาน 13

2.7 ฐาน 16

3. จงหาคำตอบในรูปเลขฐาน 8

3.1  $11101.1_2 + 56_{10}$

3.2  $1011_2 \times 101_2$

3.3  $365.75_8 + 177.77_8$

4. จงหาคำตอบของ  $11101.1_2 \div 11_2$  และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานสาม

5. จงหาคำตอบของ  $33104.01_5 \div 14.1_5$  และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานสี่

6. จงหาคำตอบของ  $(1211.01_3 + 12.1_3) \times 21.11_3$  และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานสอง

7. จงหาคำตอบของ  $(188.78_g \div 2.18_g) \times 54.76_g$  และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานห้า
8. จงเขียนตารางการแปลงตัวเลข 1 ถึง 20 ฐานสิบไปเป็นฐานสอง ฐานสี่ ฐานแปด และฐานสิบหก ให้ครบทุกตัวเลข

## เอกสารอ้างอิง

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัณฑิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ผศ.ดร.ประเสริฐ ภูเงิน และคณะ. (2550). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. บุรีรัมย์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว
- ยุวณิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ**. เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7

### เนื้อหาประจำบท

1. ตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น
2. ผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น
3. การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้น
4. ระบบสมการ
5. การเขียนกราฟอสมการเชิงเส้น
6. ระบบอสมการ
7. การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. มีความรู้ในเรื่องสมการเชิงเส้น
2. เขียนกราฟของสมการจุดประสงค์ได้
3. บอกค่าของสมการจุดประสงค์ ที่สอดคล้องกับคำตอบของระบบอสมการเชิงเส้นได้
4. เขียนสมการจุดประสงค์ อสมการข้อจำกัดจากโจทย์ปัญหาที่กำหนดได้
5. เขียนกราฟของสมการจุดประสงค์ และ อสมการข้อจำกัด

### วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
  - 1.1 ตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น
  - 1.2 ผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น
  - 1.3 การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้น
  - 1.4 ระบบสมการ
  - 1.5 การเขียนกราฟอสมการเชิงเส้น
  - 1.6 ระบบอสมการ
  - 1.7 การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
  - 2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์
  - 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

### สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ

## 2. Slide Presentation

### การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก การโต้ตอบและการซักถาม
2. แบบทดสอบ
3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

## บทที่ 7

### กำหนดการเชิงเส้น

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming) เป็นเทคนิคที่เริ่มใช้ในปี ค.ศ. 1947 ในช่วงที่สหรัฐอเมริกา กำลังประสบปัญหาทรัพยากรไม่เพียงพอและต้องหาวิธีจัดสรรให้ได้ประโยชน์สูงสุด เทคนิคการแก้ปัญหาแบบนี้นำไปใช้ในหลายด้าน เช่น การผลิตสินค้าแต่ละประเภทด้วยวัตถุดิบที่มีให้ได้กำไรสูงสุด การขนส่งให้สิ้นเปลืองน้อยที่สุด การหาปริมาณ วัตถุดิบให้ได้ส่วนประกอบตามต้องการ โดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด การมอบหมายงานให้แต่ละกลุ่ม เพื่อให้งานสำเร็จในเวลาอันน้อยที่สุด ฯลฯ

#### 7.1 ตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น

เนื่องจากปัญหากำหนดการเชิงเส้นประกอบด้วยเงื่อนไข ข้อจำกัดและเป้าหมายหรือจุดประสงค์ที่ต้องการ ดังนั้นโครงสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นประกอบด้วย

- ฟังก์ชันจุดประสงค์ (Objective function) หรือสมการเป้าหมายจะต้องตั้งจุดประสงค์อย่างชัดเจนและกำหนดค่าของเป้าหมายเป็นปริมาณ เช่น ต้องการปริมาณมากที่สุดหรือน้อยที่สุดของปัญหานั้น ดังตัวอย่างของการผลิตเก้าอี้สองชนิดคือขนาดเล็กและขนาดใหญ่ พบว่าเก้าอี้ขนาดเล็กแต่ละตัวขายได้กำไร ตัวละ 30 บาท ส่วนเก้าอี้ขนาดใหญ่แต่ละตัวขายได้กำไรตัวละ 50 บาท สมมติว่าถ้าจะให้เป็นไปตามจุดประสงค์ที่ต้องการ เขาต้องผลิตเก้าอี้ขนาดเล็ก  $x$  ตัว และเก้าอี้ขนาดใหญ่  $y$  ตัว สามารถเขียนฟังก์ชันจุดประสงค์หรือสมการเป้าหมายได้ดังนี้

$$P = 30x + 50y$$

- เงื่อนไขของข้อจำกัด (Constraint) หมายถึงระบบของสมการหรือสมการซึ่งเป็นข้อจำกัดหรือขอบเขตที่กำหนดว่าจะมีโอกาสใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดอย่างไรดังตัวอย่างการผลิตเก้าอี้เก้าอี้ขนาดเล็กแต่ละตัวต้องเสียเวลาในการเลื่อยไม้ 1 ชั่วโมง ประกอบและตกแต่ง 2 ชั่วโมง ส่วนเก้าอี้ขนาดใหญ่ต้องเสียเวลาในการเลื่อยไม้ 2 ชั่วโมง ประกอบและตกแต่ง 2 ชั่วโมง ถ้าหากคนงานเลื่อยไม้ทำงานได้วันละไม่เกิน 8 ชั่วโมง และคนงานประกอบตกแต่งทำงานได้วันละไม่เกิน 10 ชั่วโมง เขียนเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$x + 2y \leq 8 \quad (\text{เลื่อยไม้})$$

$$2x + 2y \leq 10 \quad (\text{ประกอบตกแต่ง})$$

นอกจากนี้ยังมีเงื่อนไขของตัวแปร ซึ่งในปัญหานี้เงื่อนไขของตัวแปร คือ  $x \geq 0$  และ  $y \geq 0$  จากตัวอย่างการผลิตเก้าอี้ สรุปตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\text{ฟังก์ชันจุดประสงค์ : } P = 30x + 50y$$

$$\text{เงื่อนไขข้อจำกัด : } x + 2y \leq 8$$

$$2x + 2y \leq 10$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

สรุปการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นมีวิธีการดังนี้

1. กำหนดตัวแปรตัดสินใจ โดยที่ตัวแปรเหล่านั้นเป็นตัวแปรที่แทนสิ่งที่ต้องการทราบค่าในปัญหานี้ๆ
2. สร้างฟังก์ชันจุดประสงค์หรือสมการเป้าหมายซึ่งอาจจะเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดก็ได้ สมการเป้าหมายจะมีเพียงสมการเดียว และมีลักษณะเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นกับตัวแปรตัดสินใจที่ต้องการทราบค่า
3. สร้างเงื่อนไขข้อจำกัด ในการแก้ปัญหาต้องพิจารณาว่ามีอะไรเป็นข้อจำกัดบ้าง

**ตัวอย่างที่ 7.1** ผู้จัดการบริษัทแห่งหนึ่งต้องการซื้อตู้เก็บเอกสารจำนวนหนึ่ง โดยสอบถามเกี่ยวกับตู้เอกสาร 2 ชนิด คือ ชนิด A และชนิด B ตู้เก็บเอกสารชนิด A ราคาตู้ละ 1,000 บาท ใช้พื้นที่วางตู้ 6 ตารางฟุต และเก็บเอกสารได้จุ 8 ลูกบาศก์ฟุต ในขณะที่ตู้เก็บเอกสารชนิด B ราคาตู้ละ 2,000 บาท ใช้พื้นที่วางตู้ 8 ตารางฟุต และเก็บเอกสารได้จุ 12 ลูกบาศก์ฟุต ถ้าผู้จัดการผู้นี้มีงบประมาณในการซื้อตู้เก็บเอกสารไม่เกิน 14,000 บาท และมีพื้นที่สำหรับวางตู้ไม่เกิน 72 ตารางฟุต จงหาว่าเขาควรซื้อตู้เอกสารชนิดละกี่ตู้จึงจะเก็บเอกสารได้มากที่สุด จากโจทย์ จงสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น

วิธีทำ ให้  $x$  แทน จำนวนตู้เก็บเอกสารชนิด A

$y$  แทน จำนวนตู้เก็บเอกสารชนิด B

$P$  แทน ความจุของตู้เอกสารทั้งหมดที่ผู้จัดการซื้อ

จุดประสงค์คือต้องการให้มีความจุในการเก็บเอกสารได้มากที่สุด โดยตู้ A จุได้ 8 ลูกบาศก์ฟุต และตู้ B จุได้ 12 ลูกบาศก์ฟุต ดังนั้นฟังก์ชันจุดประสงค์หรือสมการค่าสูงสุดของ  $P$  คือ

$$P = 8x + 12y$$

เงื่อนไขข้อจำกัดมีดังนี้

1. เงินไขงบประมาณในการซื้อตู้ซึ่งมีงบประมาณไม่เกิน 14,000 บาท โดยตู้ชนิด  $A$  ราคา 1,000 บาท และตู้ชนิด  $B$  ราคา 2,000 ได้อสมการเงินไข คือ

$$1,000x + 2,000y \leq 14,000$$

2. เงินไขเกี่ยวกับพื้นที่สำหรับวางตู้มีไม่เกิน 72 ตารางฟุต โดยตู้ชนิด  $A$  ใช้พื้นที่วางตู้ 6 ตารางฟุต และตู้ชนิด  $B$  ใช้พื้นที่วางตู้ 8 ตารางฟุต ได้อสมการเงินไข คือ

$$6x + 8y \leq 72$$

3. จำนวนตู้เก็บเอกสารชนิด  $A$  และจำนวนตู้เก็บเอกสารชนิด  $B$  ต้องไม่น้อยกว่า 0 นั่นคือ  $x \geq 0$  และ  $y \geq 0$

จากการพิจารณาที่ผ่านมาทำให้เราสามารถสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\text{ฟังก์ชันจุดประสงค์ : } P = 8x + 12y$$

$$\text{เงื่อนไขข้อจำกัด : } 1,000x + 2,000y \leq 14,000$$

$$6x + 8y \leq 72$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

**ตัวอย่างที่ 7.2** โดยปกติเครื่องบินลำหนึ่งมีที่นั่ง 15 ที่นั่ง บรรจุผู้โดยสารและสินค้ารวมกันได้ 1,500 กิโลกรัม แต่ถ้าน้ำหนักสินค้ามากกว่าน้ำหนักผู้โดยสารเกิน 200 กิโลกรัม เครื่องบินจะเอียงและบินไม่ได้ (สมมติว่าผู้โดยสารแต่ละคนมีน้ำหนักเฉลี่ย 75 กิโลกรัม) ถามว่าเที่ยวบินแต่ละเที่ยวจะมีรายได้มากที่สุดเท่าใด หากค่าโดยสารที่นั่งละ 6,000 บาท และค่าขนส่งสินค้ากิโลกรัมละ 100 บาท จงสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น

**วิธีทำ** ให้  $x$  แทน จำนวนผู้โดยสารหน่วยเป็นคน

$y$  แทน น้ำหนักสินค้าหน่วยเป็นกิโลกรัม

$P$  แทน รายได้ต่อเที่ยวที่ต้องการ

จุดประสงค์ที่ต้องการคือ รายได้ต่อเที่ยวมากที่สุด โดยค่าโดยสารที่นั่งละ 6,000 บาท และค่าขนส่งสินค้ากิโลกรัมละ 100 บาท ดังนั้นฟังก์ชันจุดประสงค์คือ

$$P = 6,000x + 100y$$

เงื่อนไขข้อจำกัดมีดังนี้

1. เจริญใจที่นึ่งผู้โดยสาร มีที่นั่งมากที่สุด 15 ที่นั่ง ได้อสมการเจริญใจ คือ

$$0 \leq x \leq 15$$

2. เจริญใจน้ำหนักบรรทุกทุกไม่เกิน 1,500 กิโลกรัม ได้อสมการเจริญใจ คือ

$$75x + y \leq 1,500$$

3. เจริญใจน้ำหนักน้ำหนักสินค้ามากกว่าผู้โดยสารได้ไม่เกิน 200 กิโลกรัม

$$y - 75x \leq 200$$

4. เจริญใจสินค้าไม่เป็นค่าติดลบ

$$y \geq 0$$

จากการพิจารณาที่ผ่านมาทำให้เราสามารถสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\text{ฟังก์ชันจุดประสงค์ : } P = 6,000x + 100y$$

$$\text{เจริญใจข้อจำกัด : } 75x + y \leq 1,500$$

$$y - 75x \leq 200$$

$$0 \leq x \leq 15$$

$$y \geq 0$$

**ตัวอย่างที่ 7.3** โรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 2 ชนิด คือชนิด A และชนิด B ในการผลิตต้องใช้เครื่องจักร 2 เครื่อง คือเครื่องจักร I และเครื่องจักร II ในการผลิตสินค้าชนิด A ได้กำไรขึ้นละ 3 บาท และต้องเสียเวลาการผลิตขึ้นละ 6 นาที สำหรับเครื่องจักร I และ 5 นาที สำหรับเครื่องจักร II ส่วนสินค้าชนิด B ได้กำไรขึ้นละ 4 บาท และเสียเวลาการผลิตขึ้นละ 9 นาที สำหรับเครื่องจักร I และ 4 นาที สำหรับเครื่องจักร II ถ้าในการผลิตสินค้านี้ มีเวลาผลิตสำหรับเครื่องจักร I ไม่เกิน 5 ชั่วโมง และไม่เกิน 3 ชั่วโมง สำหรับเครื่องจักร II จงสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น

วิธีทำ ให้  $x$  แทน จำนวนสินค้าชนิด A

$y$  แทน จำนวนสินค้าชนิด B

$P$  แทน กำไรจากการผลิตสินค้าจากทั้งสองชนิด

จุดประสงค์ที่ต้องการคือ กำไรจากการผลิตสินค้าจากทั้งสองชนิด โดยสินค้าชนิด A ได้กำไรขึ้นละ 3 บาท และสินค้าชนิด B ได้กำไรขึ้นละ 4 บาท ดังนั้นฟังก์ชันจุดประสงค์คือ

$$P = 3x + 4y$$

เงื่อนไขข้อจำกัดมีดังนี้

1. เงื่อนไขเวลาการผลิต สำหรับเครื่องจักร I ไม่เกิน 5 ชั่วโมง โดยสินค้าชนิด A เสียเวลาการผลิตชิ้นละ 6 นาที และสินค้าชนิด B เสียเวลาผลิตชิ้นละ 9 นาที ได้อสมการเงื่อนไข คือ

$$6x + 9y \leq 300 \text{ (เปลี่ยนหน่วยเป็นนาที)}$$

2. เงื่อนไขเวลาการผลิต สำหรับเครื่องจักร II ไม่เกิน 3 ชั่วโมง โดยสินค้าชนิด A เสียเวลาการผลิตชิ้นละ 5 นาที และสินค้าชนิด B เสียเวลาผลิตชิ้นละ 4 นาที ได้อสมการเงื่อนไข คือ

$$5x + 4y \leq 180 \text{ (เปลี่ยนหน่วยเป็นนาที)}$$

3. เงื่อนไขสินค้าไม่เป็นค่าติดลบ

$$x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

จากการพิจารณาที่ผ่านมาทำให้เราสามารถสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\text{ฟังก์ชันจุดประสงค์ : } P = 3x + 4y$$

$$\text{เงื่อนไขข้อจำกัด : } 6x + 9y \leq 300$$

$$5x + 4y \leq 180$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

จากตัวแบบของปัญหากำหนดการเชิงเส้นให้พิจารณาหาคำตอบที่ดีที่สุดในบรรดาคำตอบทั้งหลาย (Optimal solution) ซึ่งในที่นี้เรียกว่าผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น ในการหาผลเฉลยนั้นบางวิธีต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง แต่ก็มีวิธีหาคำตอบได้ง่ายคือ วิธีกราฟ (Graphical method) และในที่นี้จะกล่าวเฉพาะวิธีกราฟซึ่งใช้เฉพาะที่มีตัวแปรเพียง 2 ตัว ก่อนจะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟนั้น ต้องมีการศึกษาเกี่ยวกับการเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นและอสมการเชิงเส้น

## 7.2 การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้น (Linear equation) หรือสมการเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรง ซึ่งเป็นสมการกำลังหนึ่งสองตัวแปรมีรูปแบบคือ  $Ax + By + C = 0$  เมื่อ  $(x, y)$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $A, B$  และ  $C$  เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่  $A$  และ  $B$  ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่

จากจุดสองจุดใดๆ มีเส้นตรงผ่านได้เพียง 1 เส้น การเขียนกราฟสมการเส้นตรงจึงสามารถทำได้โดยง่ายจากการหาจุดสองจุดที่อยู่บนเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง ซึ่งจุดที่หาได้ง่ายที่สุดคือ จุดที่เส้นตรงตัดแกนพิกัดฉาก ซึ่งเรียกว่า ส่วนตัดแกน ทำได้คือ ส่วนตัดแกน  $x$  หาได้โดยการแทนค่า  $y = 0$  แล้วหาค่า  $x$  ในทำนองเดียวกัน ส่วนตัดแกน  $y$  หาได้โดยการแทนค่า  $x = 0$  แล้วหาค่า  $y$

**ตัวอย่างที่ 7.4** จงเขียนกราฟของสมการ  $2x + 3y - 6 = 0$

**วิธีทำ** กำหนดให้  $x = 0$  จะได้  $2(0) + 3y - 6 = 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad 3y = 6$$

$$\text{นั่นคือ} \quad y = 2$$

ส่วนตัดแกน  $y$  คือ  $(0, 2)$

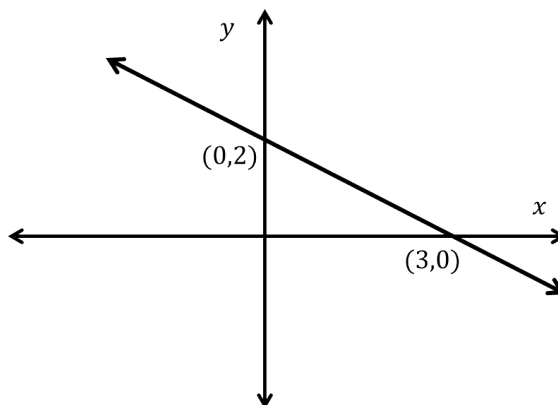
กำหนดให้  $y = 0$  จะได้  $2x + 3(0) - 6 = 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad 2x = 6$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x = 3$$

ส่วนตัดแกน  $x$  คือ  $(3, 0)$

กำหนดส่วนตัดแกนบนพิกัดแล้วเขียนกราฟได้ดังรูป



**ตัวอย่างที่ 7.5** จงเขียนกราฟของสมการ  $2x - 4y + 8 = 0$

**วิธีทำ** กำหนดให้  $x = 0$  จะได้  $2(0) - 4y + 8 = 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad -4y = -8$$

$$\text{นั่นคือ} \quad y = 2$$

ส่วนตัดแกน  $y$  คือ  $(0, 2)$

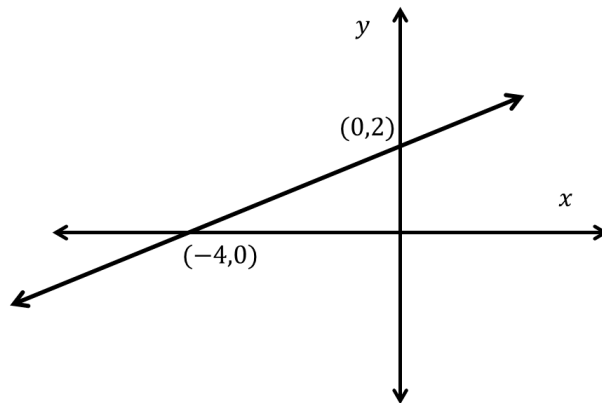
กำหนดให้  $y = 0$  จะได้  $2x - 4(0) + 8 = 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad 2x = -8$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x = -4$$

ส่วนตัดแกน  $x$  คือ  $(-4, 0)$

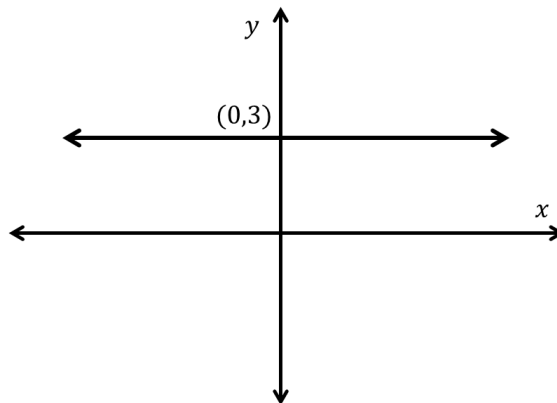
กำหนดส่วนตัดแกนบนพิกัดแล้วเขียนกราฟได้ดังรูป



ตัวอย่างที่ 7.6 จงเขียนกราฟของสมการ  $y - 3 = 0$  และ  $x + 4 = 0$

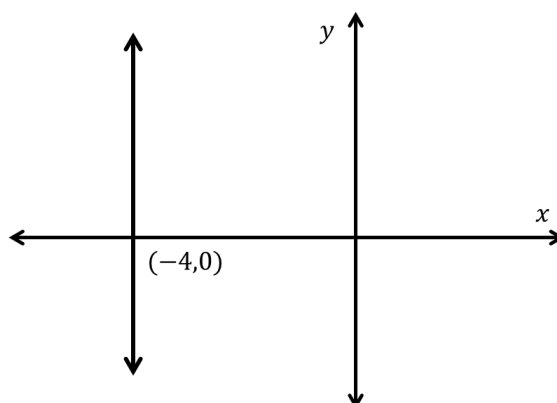
วิธีทำ จากสมการ  $y - 3 = 0$  สมมูลกับสมการ  $y = 3$  ซึ่งเป็นเส้นตรงขนานกับแกน  $x$  ที่ผ่านจุด  $(0, 3)$

ดังรูป



จากสมการ  $x + 4 = 0$  สมมูลกับสมการ  $x = -4$  ซึ่งเป็นเส้นตรงขนานกับแกน  $y$  ที่ผ่านจุด  $(-4, 0)$

ดังรูป



รูปภาพ 7.4 รูปภาพแสดงกราฟของสมการ  $x + 4 = 0$

### 7.3 ระบบสมการ

สำหรับเอกสารเล่มนี้จะศึกษาระบบของสมการ 2 สมการ ที่มีตัวแปร 2 ตัว ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

เมื่อกำหนด  $x, y$  เป็นตัวแปร และ  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  เป็นค่าคงตัว ในระนาบ 2 มิติ เส้นตรง 2 เส้น มีความสัมพันธ์เป็นไปได้ 3 กรณี คือ

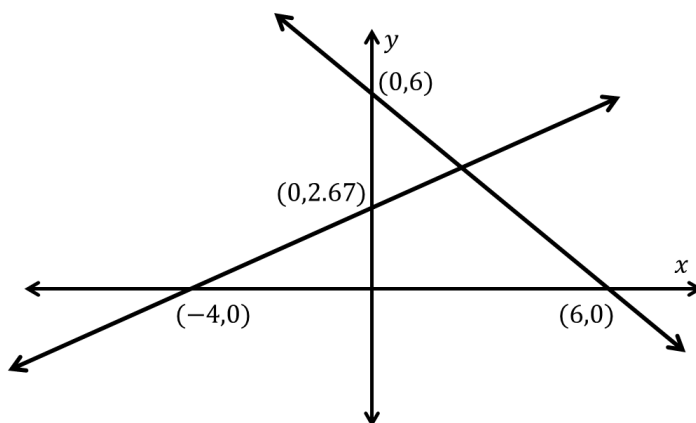
1. ตัดกันเพียงจุดเดียว ในกรณีนี้มีคำตอบเดียว
2. ขนานกัน ในกรณีนี้ไม่มีคำตอบ
3. กราฟของสมการเป็นเส้นเดียวกัน ในกรณีนี้มีเซตคำตอบเป็นเซตอนันต์

ตัวอย่างที่ 7.7 จงเขียนกราฟคำตอบของระบบสมการ

$$2x - 3y = -8$$

$$x + y = 6$$

วิธีทำ จากวิธีการเขียนกราฟสมการเชิงเส้น สามารถเขียนกราฟของสมการ  $2x - 3y = -8$  และสมการ  $x + y = 6$  ได้ดังรูป



จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะเห็นว่าจุดที่เส้นตรงตัดกันจะเป็นคำตอบของระบบสมการ การหาคำตอบของระบบสมการ มีวิธีการที่มีประสิทธิภาพที่จะทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง ในเอกสารฉบับนี้จะกล่าวถึงเฉพาะการกำจัดตัวแปรซึ่งมีวิธีการดังนี้

1. ทำสัมประสิทธิ์ของของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งให้เป็นจำนวนที่ตรงข้ามกัน โดยการคูณสมการหนึ่งหรือทั้งสองสมการด้วยค่าคงตัว
2. นำสมการที่ได้จากข้อหนึ่ง มาบวกกัน จะได้สมการใหม่ที่มีตัวแปรตัวเดียว
3. หาค่าคงตัวของตัวแปรจากสมการที่ได้ในข้อ 2
4. นำค่าของตัวแปรที่ได้ไปแทนค่าในอีกสมการ หาค่าของตัวแปรอีกตัวแปรหนึ่งจะได้คำตอบตามที่ต้องการ

**ตัวอย่างที่ 7.8** จงหาคำตอบระบบสมการ

$$2x - 3y = -8$$

$$x + y = 6$$

**วิธีทำ** กำหนดให้

$$2x - 3y = -8 \quad \dots (1)$$

และ

$$x + y = 6 \quad \dots (2)$$

นำ 3 คูณตลอดทั้งสมการที่ (2)

$$3x + 3y = 18 \quad \dots (3)$$

นำสมการที่ (1) บวกสมการที่ (3)

$$5x = 10$$

นั่นคือ

$$x = 2$$

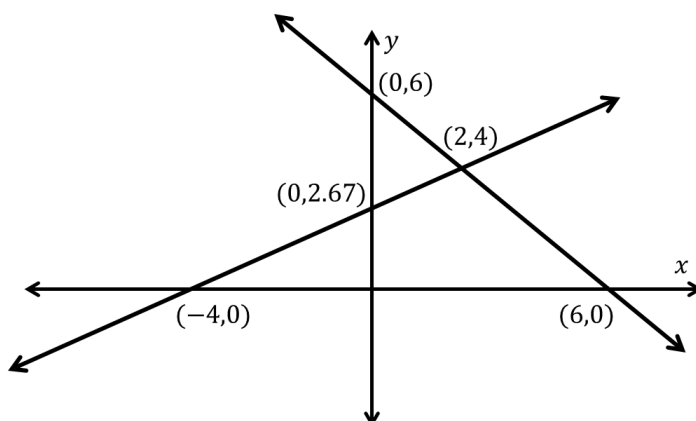
แทนค่า  $x = 2$  ลงในสมการที่ (2)

$$2 + y = 6$$

นั่นคือ

$$y = 4$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ  $(2, 4)$  ดังรูป



## 7.4 การเขียนกราฟอสมการเชิงเส้น

อสมการเชิงเส้นสองตัวแปร จะสามารถเขียนในรูปแบบต่อไปนี้

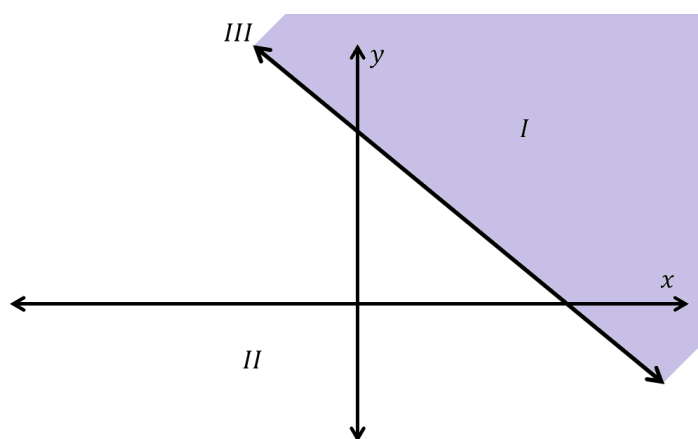
$$Ax + By + C < 0$$

$$Ax + By + C \leq 0$$

$$Ax + By + C > 0$$

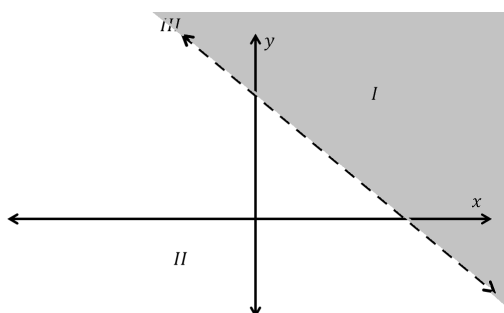
$$Ax + By + C \geq 0$$

เมื่อกำหนด  $x, y$  เป็นตัวแปร และ  $A, B, C$  เป็นค่าคงตัว ในการเขียนกราฟอสมการเชิงเส้นจะเขียนทำนองเดียวกันกับกราฟของสมการเชิงเส้นในหัวข้อ 7.2.1 พิจารณากราฟของเส้นตรงใดๆ จะแบ่งระนาบออกเป็น 3 ส่วน ดังรูป



รูปที่ 7.1 แสดงกราฟบริเวณคำตอบส่วนที่  $I$  รวมขอบ

ส่วนที่  $I$  และส่วนที่  $II$  จะเรียกว่าครึ่งระนาบ อีกส่วนหนึ่งคือเส้นตรงเรียกว่า ขอบ ถ้าครึ่งระนาบใดรวมขอบเข้าไปด้วย จะเรียกครึ่งระนาบนั้นว่า ครึ่งระนาบปิด และจะเรียกครึ่งระนาบที่ไม่รวมขอบว่า ครึ่งระนาบเปิด(ส่วนที่ขอบเขียนเป็นเส้นประ) กราฟของอสมการจะเป็นครึ่งระนาบปิดถ้าอสมการมีเครื่องหมายเท่ากับ และเป็นครึ่งระนาบเปิดถ้าไม่มีเครื่องหมายเท่ากับดังรูป



รูปที่ 7.2 แสดงกราฟบริเวณคำตอบส่วนที่  $I$  ไม่รวมขอบ

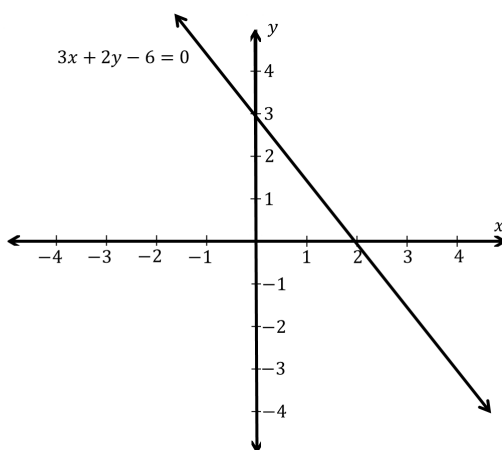
อสมการเชิงเส้นจะสัมพันธ์กับสมการที่เป็นขอบของครึ่งระนาบในการเขียนกราฟของอสมการทำได้ดังนี้

1. เขียนกราฟของสมการที่เป็นเส้นขอบก่อนถ้าอสมการมีเครื่องหมายเท่ากับ ให้เขียนเป็นเส้นทึบ ถ้าไม่มีเครื่องหมายเท่ากับเขียนเป็นเส้นประ
2. ใช้จุดที่ไม่อยู่บนเส้นขอบเป็นจุดตรวจสอบ จุดที่ตรวจสอบได้ง่ายที่สุดคือจุดกำเนิด  $(0, 0)$  ถ้าจุดตรวจสอบสอดคล้องกับอสมการแสดงว่าครึ่งระนาบที่จุดตรวจสอบอยู่เป็นครึ่งระนาบที่ต้องการ แต่ถ้าจุดตรวจสอบไม่สอดคล้องกับอสมการแสดงว่าครึ่งระนาบที่อยู่ตรงข้ามจุดตรวจสอบนั้นเป็นครึ่งระนาบที่ต้องการ
3. แรเงาครึ่งระนาบที่ได้จากข้อ 2.

**ตัวอย่างที่ 7.9** จงเขียนกราฟของ  $3x + 2y - 6 \leq 0$

**วิธีทำ**

1. เขียนกราฟของเส้นขอบ คือ  $3x + 2y - 6 \leq 0$  เนื่องจากอสมการเป็นเครื่องหมาย  $\leq$  จึงเขียนเป็นเส้นทึบดังรูป

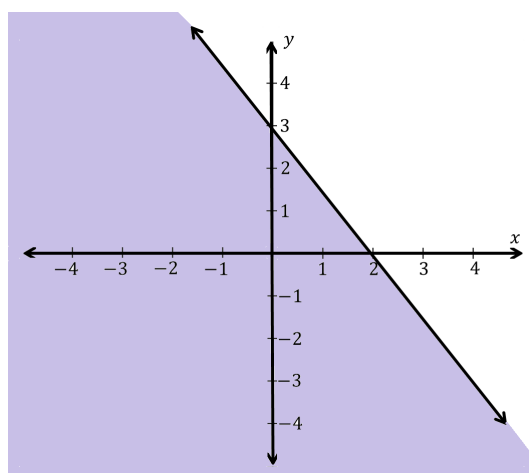


2. ใช้จุด  $(0, 0)$  ตรวจสอบอสมการ  $3x + 2y - 6 \leq 0$

จะได้ว่า  $3(0) + 2(0) - 6 \leq 0$

นั่นคือ  $-6 \leq 0$  เป็นจริง

3. แรเงาครึ่งระนาบที่จุด  $(0, 0)$  อยู่จะได้กราฟของอสมการ  $3x + 2y - 6 \leq 0$  ดังรูป



## 7.5 ระบบอสมการ

สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับระบบสมการในหัวข้อ 7.3 ผลเฉลยของระบบอสมการหรือบริเวณที่สอดคล้องกับระบบอสมการคือส่วนร่วมของบริเวณของแต่ละอสมการในระบบนั่นเอง

**ตัวอย่างที่ 7.10** จงเขียนกราฟบริเวณผลเฉลยของระบบอสมการ

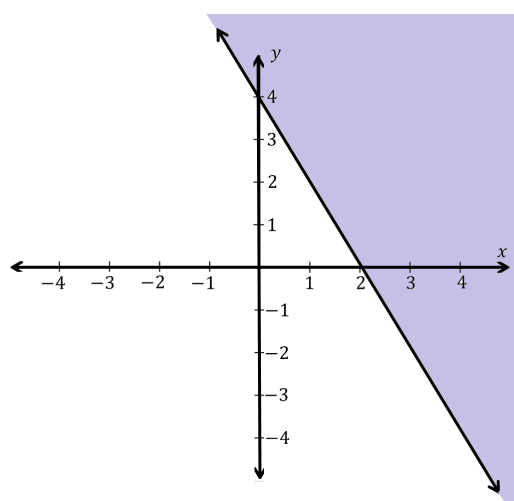
$$y \geq -2x + 4$$

$$x \leq 4$$

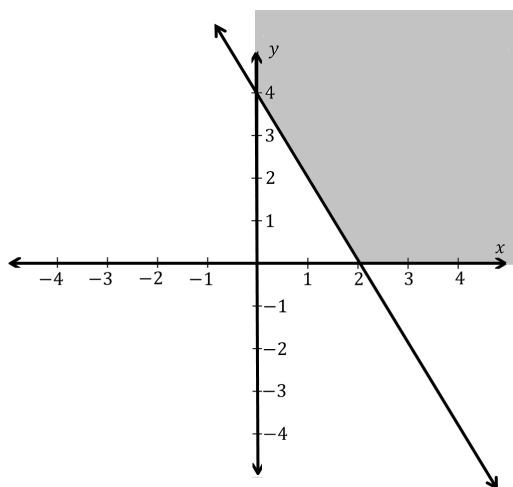
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

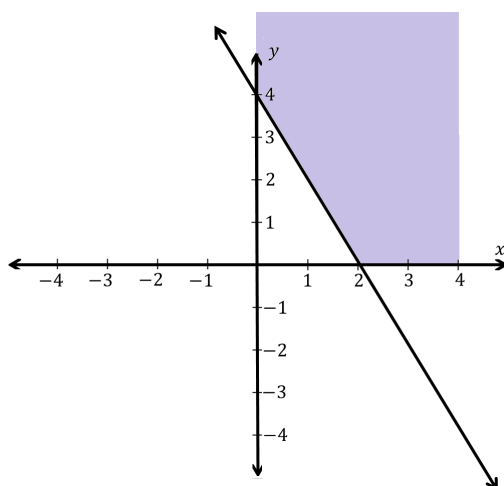
**วิธีทำ** พิจารณากราฟของ  $y \geq -2x + 4$



จากกราฟของ  $x \geq 0$  และ  $y \geq 0$  คือบริเวณในจุดภาคที่ 1 ดังนั้นบริเวณส่วนร่วมของกราฟจะได้ดังนี้



เงื่อนไขสุดท้าย  $x \leq 4$  จะได้บริเวณส่วนร่วมของกราฟทั้งหมดหรือบริเวณของคำตอบ คือ



ตัวอย่างที่ 7.11 จงเขียนกราฟบริเวณผลเฉลยของระบบอสมการ

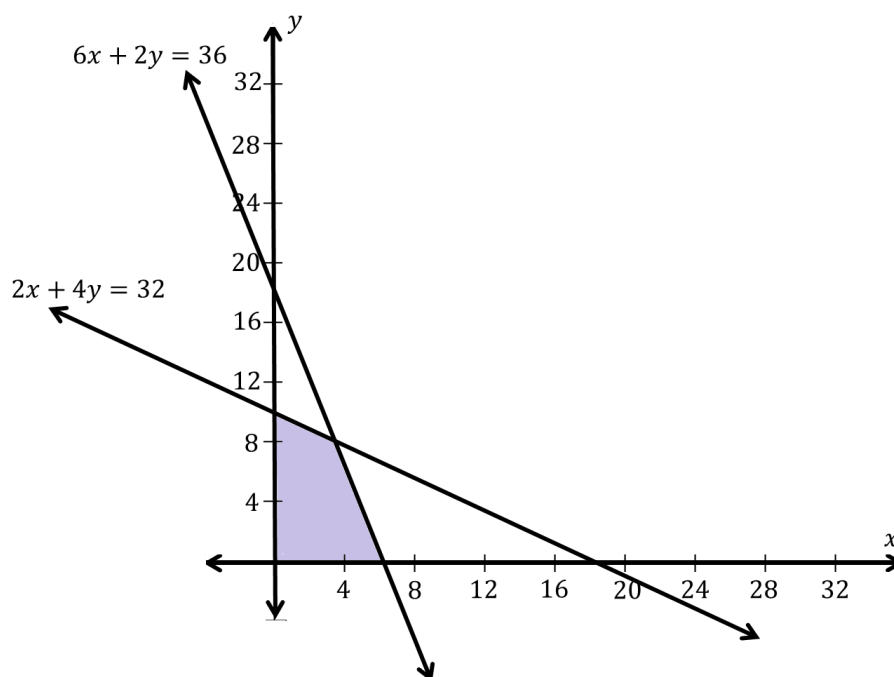
$$6x + 2y \leq 36$$

$$2x + 4y \leq 32$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

วิธีทำ จากกราฟของแต่ละอสมการ แรเงาส่วนร่วม จะได้บริเวณผลเฉลยของระบบอสมการดังรูป



## 7.6 การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ

การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟนี้จะเหมาะสำหรับปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจเพียงแค่ 2 ตัวเท่านั้น ซึ่งสรุปวิธีการหาผลเฉลยปัญหากำหนดการเชิงเส้น ดังนี้

1. นำข้อจำกัดจากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นมาเขียนกราฟบริเวณที่สอดคล้องกับข้อจำกัด เรียกว่า บริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้ของตัวแบบ
2. หาพิกัดของจุดมุมของขอบบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้
3. นำพิกัดของจุดมุมจากข้อ 2 แทนค่าในสมการเป้าหมายหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

**ตัวอย่างที่ 7.12** บริษัทเฟอร์นิเจอร์แห่งหนึ่งกำลังตัดสินใจว่าบริษัทควรจะมีโต๊ะและเก้าอี้เป็นจำนวนเท่าใดจึงจะทำให้บริษัทมีกำไรมากที่สุด โดยในการผลิตเก้าอี้ 1 ตัวใช้แผ่นไม้ 20 ฟุต และใช้แรงงานประกอบ 4 ชั่วโมง สำหรับการผลิตโต๊ะ 1 ตัว ใช้แผ่นไม้ 50 ฟุต และใช้แรงงานประกอบ 3 ชั่วโมง ในการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ บริษัทมีแผ่นไม้อยู่ทั้งหมด 3,300 ฟุตและมีแรงงานอยู่ 380 ชั่วโมง หลังจากการผลิตและนำออกขาย บริษัทจะได้กำไรจากการขายเก้าอี้และโต๊ะตัวละ 30 บาทและ 60 บาทตามลำดับ บริษัทควรจะมีโต๊ะและเก้าอี้เป็นจำนวนเท่าใดจึงจะทำให้บริษัทได้กำไรสูงสุด

**วิธีทำ** สร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น

ให้  $x$  แทน จำนวนเก้าอี้ที่ผลิต

$y$  แทน จำนวนโต๊ะที่ผลิต

$P$  แทน จำนวนเงินกำไรที่ได้รับ

จะได้รับตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น ดังนี้

ฟังก์ชันจุดประสงค์ : สมการค่าสูงสุดของ  $P$

$$P = 30x + 60y$$

อสมการเงื่อนไข :  $20x + 50y \leq 3,300$

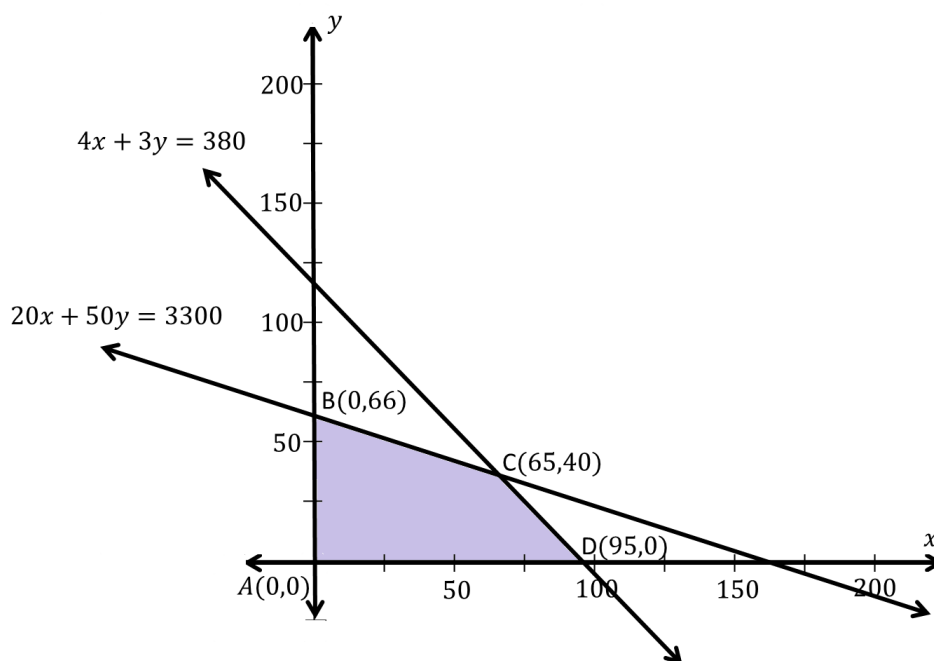
$$4x + 3y \leq 380$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

หาผลเฉลยของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น

1. จากข้อจำกัดนำมาเขียนกราฟหาบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังนี้



2. จากบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้ คือ  $ABCD$  จุดมุมที่อยู่ขอบมีพิกัดเป็น  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 66)$ ,  $C(65, 40)$  และ  $D(95, 0)$
3. หาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด คือ ค่าสูงสุด ดังนี้

| จุดมุม      | $x$ | $y$ | ค่าของ $P = 30x + 60y$ |
|-------------|-----|-----|------------------------|
| $A(0, 0)$   | 0   | 0   | 0                      |
| $B(0, 66)$  | 0   | 66  | 3,960                  |
| $C(65, 40)$ | 65  | 40  | 4,350                  |
| $D(95, 0)$  | 95  | 0   | 2,850                  |

จะได้ว่าจุด  $C$  ให้ค่า  $P$  สูงสุด จึงเป็นจุดที่ให้ผลเฉลี่ยที่เหมาะสมที่สุด สรุปได้ว่า เพื่อให้ได้กำไรสูงสุดบริษัทควรผลิตเก้าอี้ 65 ตัวและผลิตโต๊ะ 40 ตัว โดยกำไรสูงสุดคือ 4,350 ตัว

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ผู้เขียนได้เรียบเรียงเนื้อหาตั้งแต่การพิจารณาตัวแบบของปัญหา การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้น ระบบสมการ การเขียนกราฟอสมการเชิงเส้น ระบบอสมการ การเขียนกราฟอสมการเชิงเส้น ตลอดจนการหาผลเฉลย เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจและสามารถนำไปแก้ปัญหาเบื้องต้นได้

กำหนดการเชิงเส้นเป็นเรื่องที่มีวัตถุประสงค์ในการเรียนรู้ที่ชัดเจนใช้สำหรับประกอบการตัดสินใจในชีวิตประจำวัน การดำเนินธุรกิจเบื้องต้น การคำนวณหาต้นทุนน้อยที่สุด การคำนวณหากำไรมากที่สุด โดยต้องเรียนรู้การสร้างอสมการเงื่อนไขที่ทำความเข้าใจค่อนข้างยาก รวมถึงการสร้างกราฟเชิงเส้นอย่างง่าย แต่หากเรียนเข้าใจได้ดีก็จะช่วยการตัดสินใจเบื้องต้นและเป็นพื้นฐานการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

### แบบฝึกหัดท้ายบท

1. บริษัทผลิตโทรทัศน์แห่งหนึ่งต้องการผลิตโทรทัศน์ทั้งชนิดขาวดำ และชนิดสี กำลังการผลิตของบริษัทแห่งนี้ไม่เกิน 800 เครื่องต่อเดือน โดยมีต้นทุนในการผลิตโทรทัศน์ขาวดำ เครื่องละ 2,500 บาท และชนิดสีเครื่องละ 3,500 บาท ในขณะเดียวกันบริษัทแห่งนี้จะมีกำไร เครื่องละ 1,500 บาท สำหรับโทรทัศน์ขาวดำ และ 2,100 บาท สำหรับโทรทัศน์สี ถ้าบริษัทแห่งนี้กำหนดเงินทุนในการผลิตไว้ไม่เกิน 2,500,000 บาทต่อเดือน อยากทราบว่าบริษัทแห่งนี้ควรผลิตโทรทัศน์ขาวดำและสีอย่างละกี่เครื่องต่อเดือน จึงจะทำให้กำไรมากที่สุดและกำไรมากที่สุดเป็นเท่าไร
2. โรงงานผลิตสินค้าสองชนิด แต่ละวันจะใช้เหล็ก 250 กิโลกรัม สินค้าชนิดที่หนึ่งใช้เหล็กขึ้นละ 10 กิโลกรัม ชนิดที่สองใช้เหล็กขึ้นละ 25 กิโลกรัม และสำหรับเวลาที่ใช้ผลิตแต่ละวันมี 260 นาที ทั้งสองชนิดใช้เวลาขึ้นละ 20 นาทีเท่ากัน ส่วนการทาสีมีเวลารวมวันละ 100 นาที ชนิดแรกใช้เวลาทาสีขึ้นละ 10 นาที ชนิดที่สองขึ้นละ 4 นาที ถ้าสินค้าชนิดแรกกำไรขึ้นละ 30 บาท ชนิดที่สองกำไรขึ้นละ 25 บาท ควรจะผลิตอย่างละกี่ชิ้นใน 1 วันจึงได้กำไรสูงสุด
3. บริษัทผลิตวิทยุแห่งหนึ่งผลิตวิทยุออกมา 2 รุ่น คือรุ่น A กับรุ่น B โดยที่รุ่น A มีกำไรเครื่องละ 250 บาท รุ่น B 300 บาท แต่ละวันตั้งใจจะผลิตรุ่น A ไม่น้อยกว่า 80 เครื่อง รุ่น B ไม่น้อยกว่า 100 เครื่อง แต่ผลิตได้รวมกันไม่เกินวันละ 200 เครื่อง ควรจะผลิตอย่างไรจึงจะได้กำไรสูงสุด และ กำไรสูงสุดนั้นเป็นเท่าใด
4. โรงงานเฟอร์นิเจอร์ทำตู้และเตียงซึ่งจะใช้แรงงานช่างไม้กับช่างทาสี โดยตู้ 1 ใบช่างไม้ใช้เวลาทำ 15 ชั่วโมง ช่างทาสีอีก 12 ชั่วโมง และเตียง 1 หลังช่างไม้ใช้เวลาทำ 5 ชั่วโมง ช่างทาสี 4 ชั่วโมง ถ้าแต่ละวันช่างไม้ทุกคนช่วยกันทำงานได้เวลารวมกันอย่างมาก 60 ชั่วโมง ช่างทาสีรวมกัน 40 ชั่วโมง ส่วนกำไรนั้นตู้ใบละ 500 บาท เตียงหลังละ 400 บาท ควรจะผลิตตู้และเตียงอย่างละเท่าใด ต่อวัน
5. ผู้จัดการบริษัทต้องการซื้อตู้เก็บเอกสารใหม่จำนวนหนึ่ง เขาสอบถามได้ข้อมูลว่าตู้ยี่ห้อ A ราคาตู้ละ 400 บาท ใช้พื้นที่วาง 6 ตารางฟุต จุเอกสารได้ 8 ลูกบาศก์ฟุต ส่วนตู้ยี่ห้อ B ราคาตู้ละ 800 บาท ใช้พื้นที่วาง 8 ตารางฟุต จุเอกสารได้ 12 ลูกบาศก์ฟุต หากเขามีงบไม่เกิน 5,600 บาท และมี พื้นที่ไม่เกิน 72 ตารางฟุต เขาควรจะซื้ออย่างละกี่ตู้เพื่อให้เก็บเอกสารได้มากที่สุด และถามว่าเก็บ เอกสารได้เท่าใด
6. ต้องการจ้างคนงานสองคนมาทำความสะอาดตู้ 5 ตู้ โต๊ะ 12 ตัว และหิ้งหนังสือ 18 หิ้ง โดย คนงานคนที่หนึ่งสามารถทำความสะอาดตู้ได้ 1 ตู้ โต๊ะ 3 ตัว และหิ้งหนังสือ 3 หิ้งต่อชั่วโมง คนที่สองทำความสะอาดตู้ 1 ตู้ โต๊ะ 2 ตัว และหิ้งหนังสือ 6 หิ้งต่อชั่วโมง ค่าแรงคนที่หนึ่ง 25 บาท

ต่อ ชั่วโมง ค่าแรงคนที่สอง 22 บาทต่อชั่วโมง ควรจะจ้างคนงานทั้งสองทำงานคนละกี่ชั่วโมง เพื่อเสีย ค่าแรงน้อยที่สุด

7. บริษัทแห่งหนึ่งมีเหมืองอยู่ 2 แห่ง ในแต่ละวันเหมืองแรกผลิตแร่เกรด A ได้ 1 ตัน เกรด B 3 ตัน และเกรด C 5 ตัน ส่วนเหมืองที่สองผลิตแร่ทั้งสามเกรดได้เกรดละ 2 ตันเท่ากัน หากบริษัทต้องการผลิตแร่ส่งลูกค้าโดยเป็นแร่เกรด A 80 ตัน เกรด B 150 ตัน และเกรด C 200 ตัน ให้หาว่าบริษัทควรเปิดเหมืองเพื่อผลิตแร่แห่งละกี่วันจึงจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด (ค่าใช้จ่ายในการขุดแร่ แต่ละเหมืองเป็น 6,000 บาทต่อวัน เท่ากัน)
8. อาหารปลาชนิดแรกราคาถุงละ 6 บาท มีอัตราส่วนระหว่างโปรตีน ไขมัน และคาร์โบไฮเดรต เท่ากับ  $1 : 2 : 2$  ในขณะที่อาหารปลาชนิดที่สองราคาถุงละ 4 บาท มีอัตราส่วนเป็น  $1 : 1 : 5$  ให้หาอัตราส่วนระหว่างอาหารชนิดที่หนึ่งกับชนิดที่สองที่ผู้เลี้ยงปลาควรซื้อ ถ้าอัตราส่วนระหว่าง โปรตีน ไขมัน และคาร์โบไฮเดรต ที่จำเป็นต้องใช้ ไม่ต่ำกว่า  $3 : 4 : 10$

## เอกสารอ้างอิง

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัตินิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ผศ.ดร.ประเสริฐ ภูเงิน และคณะ. (2550). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. บุรีรัมย์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว
- ยุวณิตย หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ**. เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่
- รศ.สุนทร แสงผล และ รศ.ก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง

## บรรณานุกรม

- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัณฑิต)
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์)**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ประเสริฐ ภู่งเงิน และคณะ. (2550). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. บุรีรัมย์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ**. สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว
- ยุวณิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ**. เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่
- สุนทร แสงวงผล และ ก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
- ปุ่นศยา พัฒนางกูร. (2555). **พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

## VITA